SÉRIE A, N· 4567
N· D'ORDRE : 5414

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

HEUZÉ Guy

PREMIÈRE THÈSE

Contribution à l'étude des schémas d'association

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Nombres de Bernouilli. Applications

15 JUIN 1965

Soutenues le devant la Commission d'Examen :

MM. DUBREIL Président

DUGUÉ
PISOT } Examinateurs

SÉRIE A, N° 4567
N° D'ORDRE : 5414

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

HEUZÉ Guy

PREMIÈRE THÈSE

Contribution à l'étude des schémas d'association

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Nombres de Bernouilli. Applications

Soutenues le devant la Commission d'Examen :

MM. DUBREIL Président
DUGUÉ, PISOT } Examinateurs

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen.... M. ZAMANSKY

MM.	BRELOT	T Analyse supérieure
	PRENANT	T Anatomie et histologie comparée
	GRASSE	T Evolution des êtres organisés
	PREVOST	T Chimie Organique
	WYART	T Minéralo & Cristallo
	TEISSIER	T Zoologie
	MANGENOT	T Biologie végé. (Orsay)
	AUGER	T Physique quantique et relativité
	MONNIER	T Physiologie générale
	PIVETEAU	T Paléontologie
	ROCARD	T Physique ENS
	CARTAN	T Mathématiques ENS
	LAFFITTE N.	T Chimie générale
	COULOMB	T Physique du globe
Mlle	COUSIN	T Biologie animale SPCN
	CHRETIEN	T Chimie minérale
	BOCQUET	T Zoologie
	KASTLER	T Physique ENS
	EPHRUSSI	T Génétique
	RIVIERE	T Géologie SPCN & Sédiment (Orsay)
	GAUTHERET	T Biologie végétale PCB
	LUCAS R.	T Recherches Physiques
	TOHMAS A.	T Biologie cellulaire
	ARNULF	T Optique appliquée
	MORAND	T Physique enseignement
	SOLEILLET	T Physique PCB
	FORTIER	T Mécanique exp. des fluides
	DRACH	T Zoologie
	QUENEY	T Météo & Dynamique atmos.
	GALLIEN	T Embryologie
	EICHORN	T Botanique
	DE CUGNAC	T Biologie végétale SPCN
Mlle	CAUCHOIS	T Chimie physique
	THELLIER	T Physique du globe
	L'HERITIER	T Biologie générale Orsay
	GRIVET	T Radioélectricité Orsay
	PONCIN	T Mécanique générale
	DU BREIL	T Arith.& Théorie des nombres
	QUELET	T Chimie organique
	GAGNIARD	T Géophysique appliquée
	CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire
	CUVILLIER	T Micropaléontologie
	JUNG	T Géologie
	TRILLAT	T Microscopie et diffraction électro.
	WIEMANN	T Chimie organ. & struc.
	JACQUINOT	T Spectroscopie et Physique céleste (Orsay)
	VASSY	T Physique de l'atmosphère
	DESTOUCHES	T Théorie physique
	AMIEL	T Chimie générale
	HOCART	T Minéralo. & Cristalo.
	MATHIEU J. P.	T Physique optique
	COUTEAUX	T Cytologie
	MAY	T Zoologie
	CHOQUET	T Théorie des fonctions et topologie
	FELDMANN	T Biologie végétale marine
	GUINIER	T Physique des solides (Orsay)
	JOST	T Physiologie comparée
	FORTET	T Calcul des probabilités et Phys. Mathém.
	SCHWARTZ	T Calcul diff. & Intégral
	CHOUARD	T Physiologie végétale
	MALAVARD	T Aviation (Tech. Aéron.)
	NORMANT	T Synthèse organique
	BENARD	T Chimie minérale
	BUVAT	T Botanique ENS
	DUGUE	T Statistique mathématiques
	SOULAIRAC	T Psychophysiologie
	ULRICH	T Physiologie Vég. Appl.
	MARECHAL	T Optique théor. & appl.
	KIRRMANN	T Théories chimiques
	CHADEFAUD	T Botanique
Mlle	LE BRETON	T Physiol. de la nutrition
	LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie
	DEVILLERS	T Anatomie & Histo. compar.
	EHRESMANN	T Topologie algébrique
	FRANCON	T Physique SPCN
	BLANCEAUD	T Géographie phys. & géol.
	GODEMENT	T Mathématiques MGP
	PISOT	T Technique math. de la phys.
	ROCH	T Géologie
	SCHATZMANN	T Astrophysique
	TERMIER	T Géologie générale
	ZAMANSKY	T Mathématiques générales
	LENNUIER	T Physique MGP
	RIZET	T Génétique Orsay
	ROUTHIER	T Géologie appliquée
Mme	TONNELAT	T Physique théorique
	DIXMIER	T Mathématiques MPC
	SOUCHAY	T Chimie générale
	AIGRAIN	T Electrotechnique générale
	BRUSSET	T Chimie syatématique
	LEVY M.	T Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
Mme	CHAIX	T Chimie biologique
Mme	HUREL PY	T Biologie végétale PCB
	PANNETIER	T Chimie générale
	BRUN	T Mécanique des fluides I
	LEDERER	T Chimie biologique (Orsay)
Mme	DUBREIL	T Mathématiques (Agrég.)
Mme	LELONG	T Mathématiques II ENS
	BELLAIR	T Géologie SPCN
	COTTE	T Physique électricité
	DUBOIS J. E.	T Chimie organique
	LAMOTTE	T Zoologie ENS
	MICHEL A.	T Chimie minérale Orsay
	OLMER	T Energétique générale
	ROUAULT	T Electricité (Orsay)
	GAUTHIER	T Mécanique appliquée
	BARCHEWITZ	T Chimie physique
	BROSSEL	T Physique atomique
	BUSER	T Physiologie comparée
	CAMUS	T Physiologie végétale
	CASTAING	T Physique II Thermo (Orsay)
	CURIEN	T Minéralo. & cristal.
	MOYSE	T Physiologie végétale (Orsay)
Mme	CHARNIAUX-COTTON	T Evolution des êtres organisés
	POSSOMPES	T Zoologie
	PULLMANN	T Chimie quantique
	TEILLAC	T Physique Nucl. & radioactivité (Orsay)
	TONNELAT	T Biol. Physico-chim.(Orsay)
	VILLE	T Econométrie
	WILLEMART	T Chimie PCB
	DODE	T Chimie (Orsay)
	FREYMANN	T Recherches physiques
	GUINOCHET	T Biologie végétale SPCN (Orsay)
	ROLLET	T Chimie minérale
Mlle	JOSIEN	T Chimie SPCN
	CHEVALLEY	T Géométrie algéb. et théorie des groupes
	ARNOULT	T Electronique Orsay
	CHAPELLE	T Physique I (Orsay)
	DELANGE	T Mathématiques I (Orsay)
	DENY	T Mathématiques générales (Orsay)
	GERMAIN	T Mécanique théorique des fluides
	LUCAS	T Géologie
	ALLARD	T Chimie physique
	BERTHELOT	T Physique des particules fondamentales (Orsay)
	BRICARD	T Météor. et physique de l'atmosphère
Mme	ALBE FESSARD	T Psycho-physio.
	FRIEDEL	T Physique des solides (Orsay)
	JULIA M.	T Etudes des moléculaires complexes
	LENDER	T Biologie animale SPCN (Orsay)
	MAGAT	T Physico chimie des radioéléments
Mlle	QUINTIN	T Electrochimie
	MONOD	T Chimie du métabolisme
	BENOIT	T Physio. animale (Orsay)
	DE POSSEL	T Analyse numérique
	CHARLOT	T Chimie analytique
	LEMEE	T Ecologie végétale (Orsay)
	GUERIN	T Chimie MPC (Orsay)
	CHATELET	T Chimie PCB
	JEAN	T Physio. nucléaire (Orsay)
	MATTLER	T Physique SPCN
	BERGERARD	T Zoologie (Orsay)
	BERTEIN	T Electronique (Orsay)
	BOUISSIERES	T Radiochimie
Mme	COUTURE	T Thermo. et méca. physique
	LLEMBERGER	T Géologie des grandes régions du globe (Orsay)
	FRANC	T Biologie animale PCB
	SCHNELL	Botanique tropicale
	STLKOWSKI	T Physiologie végétale
	ACHER	T Chimie biologique
	BAUDOIN	T Biologie animale PCB
	BEAUMONT	Biologie animale SPCN
	BLAMONT	Géophysique Ionosphère
	BOUREAU	T Botanique
	CURIE D.	Physique MGP
	DURAND DELGA	T Géologie
	FREON	T Chimie organique (Orsay)
	HELLER	T Physiologie végétale
	TORTRAT	T Calcul des probabilités
	CAILLEUX	T Géologie SPCN
	MAGNAN	Physique électricité
	DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appli. à la Chimie Théor. & à la Phys. Nucléaire
Mlle	FOURCROY	Biologie végétale SPCN
Mme	CHOQUET BRUHAT	Mécanique analytique et méca. céleste
Mlle	VEIL	T Physiologie générale
	LWOFF	T Microbiologie
	SIESTRUNCK	T Méca. phys. & expérimentale
	LACOMBE	T Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay)
	BROCHARD	T Physique PCB (Orsay)
	CABANNES	T Mécanique générale
	LESIEUR	T Math. I (Orsay)
	MAZET	T Méca. générale (Orsay)
	CAIRE	Géographie physique et géo. dynamique
	COMOLET	Méca. des fluides
	CORABOEUF	T Physiologie animale (Orsay)
	DELLOUE	Physique de l'atmosphère
	GORENFLOT	Botanique II (Orsay)
	HOUILLON	Biologie animale PCB
	JULLIEN J.	Chimie SPCN (Orsay)
	MALGRANGE	T Technique Math. de la physique (Orsay)
	OLIVIER	Antropologie
	NOZERAN	T Botanique II (Orsay)
	BLANC-LAPIERRE	T Physique ENS (Orsay)
	CHEVAUGEON	T Botanique (Orsay)
	KAHANE	T Mathématiques (Orsay)
	SAMUEL	T Mathématiques ENS féminines
	KOURGANOFF	T Astronomie (Orsay)
	THIRY	T Méca. céleste
	ABELES	Physique SPCN
	AMAT	T Physique PCB
	AUBOIN	T Géologie
Mme	BENOIT-GUEUTAL	T Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
	BOUGIS	Biologie marine Villefranche/mer
	BRUHAT	T Math. MPC
	BRUNN	T Géologie historique (Orsay)
	CHABBAL	T Physique MGP (Orsay)
	DENEUVELS	T Math. propé.
	D'ESPAGNAT	T Physique théorique (Orsay)
	FURON	T Géologie SPCN
Mme	GANS	T Génétique
	GENEVES	Biologie végétale PCB
	GUILBERT	Physique CUS Orléans
	HUPE	T Pétrographie
	HOLLANDE	T Biologie générale
	LIONS	T Analyse numérique
	MAITTE	T Chimie PCB
	MEYER	Physique propédeutique
	PANIGEL	Biologie générale
	RAVIER	Pétrographie
	ROSEAU	T Méca. théorique des fluides Electronique
	ROUBINE	
	SILBER	T Chimie PCB
	UEBERSFELD	T Electronique
	YVON	T Théories physiques
	HERVE	T Mathématiques
	NERON	T Math. MPC (Orsay)
Mme	PECKER WIMEL	T Astrophysique
	BALKANSKY	Physique MPC
	LE CORRE	T Electricité
	DELCROIX	T Physique théorique (Orsay)
	GOURDIN	Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
	LEHMANN	T Phys. Exp. des hautes énergies
	NATAF	T Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
	ECHALIER	Biologie animale PCB
	BARRAUD	Physiologie cellulaire
	LIORET	Physiologie végétale (Orsay)
	DARS	Géologie structurale et Géologie appliquée
	CAMEFORT	T Botanique (agrégation)
	VICHNIEWSKY	T Mécanique industrielle
	BLAQUIERE	Electronique (Orsay)
	ARNOUS	T Physique théorique
	TATIBOUET	Chimie (CSU Orléans)
	MALLIAVIN	T Mathématiques propé. (Orsay)
	GAUDEMAR	Chimie propé.
	PEREZ Y JORBA	Physique Exp des hautes énergies (Orsay)
	DAVID	T Chimie (agrégation Orsay)
	BROUSSE	T Mécanique théorique
	ROSCH	T Astronomie
	QUY	T Physique expérimentale
	LAZARD	Math MPC
	MOREL P.	Physique MPC
	ARSAC	Programmation
	LEFEBVRE	Chimie MPC
	CHAPEVILLE	Biochimie
	BENOIT	Physique CPEM
	RIO	Chimie CPEM
	JAUZEIN	Géologie ENS
	PREVOST G.	BV CPEM
	FAVARD P.	BA CPEM
	VILKAS	Chimie CPEM
Mlle	FICINI	Chimie CPEM
	LEQUEUX	Astronomie
	COHEN TANNOUDJI	Physique MPC
	TAVERNIER	Physique CPEM
Mme	ROIZEN	Physique CPEM
	DURAND M.	BA SPCN
	PASCAUD	Physiologie
Mme	PETIT	BA CPEN
	BROUSSE	Géologie (Orsay)
	CAGNIAC	Physique agrégation (Orsay)
	LEBERRE	Zoologie (Orsay)
	SCHEFFER	Microbiologie (Orsay)
	de GENNES	Physique des solides (Orsay)
	RIOU	Physique nucléaires exp. (Orsay)
	CLAUSER	Chimie biologique (Orsay)
	CHEVALIER	Physiologie animale (Orsay)
	JANCOVICI	Physique stomique (Orsay)
	FALK-VAIRANT	Physique nucléaire (Orsay)
	FETIZON	Chimie propé. (Orsay)
	CERF	Mathématiques (Orsay)

Secrétaire général ... R. POULAIN

Introduction

Les "Plans Partiellement Equilibrés" (en abrégé PBD : Partially Balanced Designs) sont nés en 1939 dans [5] (on trouvera une vue d'ensemble sur la question dans [14]) et c'est en 1952 [6] qu'il a été mis en évidence qu'un PBD était la superposition de deux structures, celle de base étant alors baptisée "Schéma d'Association". Le présent travail constitue la première étude systématique des schémas d'association (nous dirons souvent schémas).

Le premier chapitre est consacré à l'étude générale des schémas à m classes. La définition proposée diffère légèrement dans sa formulation des définitions antérieures du fait de l'introduction de (A1), amplement justifiée par toutes les simplifications qu'elle apporte dans la suite de l'étude. Par contre, notre corollaire 1.1.1 figurait jusqu'alors parmi les axiomes. La suite de 1.1 est une récapitulation des relations déjà connues vérifiées par les paramètres.

Dans 1.2 nous introduisons la notion d'équivalence dans les schémas. Nous caractérisons les équivalences en termes de paramètres du schéma, montrons une propriété de divisibilité qui sera plusieurs fois utilisée et terminons par l'étude des schémas ayant le maximum d'équivalences (on trouvera dans [17] une autre application, se rapportant aux PBD, de la notion d'équivalence).

Dans 1-3 nous résolvons le problème de la réduction du nombre de classes d'un schéma en le ramenant en pratique à l'examen des transformées des matrices d'association par une certaine "contraction" introduite à cette occasion. Dans le cas ou plusieurs classes peuvent se fondre en une seule, l'examen à effectuer devient très simple et, joint à une condition portant sur l'aspect PBD, fournit un critère [16] justifiant (resp. aboutissant à) la réduction du nombre de classes de certains PBD de [24] (resp. [20]).

1.4 prolonge [4] en associant à tout schéma à m classes une $\mathbf{Z}$-algèbre commutative, unitaire, libre et de dimension $(m+1)$. [26] projette sur cette algèbre un éclairage nouveau.

Le deuxième chapitre s'intéresse aux propriétés particulières des schémas à deux classes (les plus utilisés dans les applications), étude d'autant plus justifiée qu'on peut construire au moins deux PBD sur tout schéma à deux classes [18].

2.1 commence par un théorème (que nous utiliserons souvent) donnant des conditions nécessaires et suffisantes pour que trois relations déterminent un schéma et se poursuit par une étude détaillée des propriétés attachées aux paramètres.

Dans 2.2 nous introduisons et étudions les (k , r , t)-schémas qui englobent de nombreuses familles de schémas, en particulier les schémas "pseudo-géométriques" de [2]. Une famille importante de (k , r , t)-schémas étant constituée par les schémas associés à certaines (k , r , t)-géométries, le problème réciproque (à quelles conditions un (k , r , t)-schéma est-il le schéma d'une (k , r , t)-géométrie ?) trouve une solution dans le théorème 2.2.6 dont la démonstration s'inspire de [3], généralisation terme à terme d'un résultat de [11].

2.3 étudie les schémas "cycliques" donnant en particulier une caractérisation de ces schémas, très utile dans les constructions.

Le troisième chapitre enfin décrit diverses constructions de schémas, illustrés d'exemples.

3.1 tout d'abord s'intéresse aux constructions générales de schémas à m classes. Le théorème 3.2.1 exploite une idée de [22] : il dégage une méthode générale et la fait suivre de trois familles d'exemples. Les constructions décrites dans les théorèmes 3.2.2 et 3.2.3 sont nouvelles. Les réciproques de ces théorèmes ont déjà eu des applications.

3.2 se consacre aux schémas à deux classes et contient en particulier une étude plus approfondie des (k , r , t)-géométries : certaines des propriétés obtenues peuvent être interprétées comme des généralisations de résultats mentionnés dans [1] et [15].

Cette thèse s'est préparée sous la direction de Monsieur Dugue. Je n'oublierai jamais ses encouragements et toutes les manifestations de l'intérêt qu'il a porté à l'avancement du travail.

Je suis très heureux de ce que Monsieur Dubreil ait accepté la présidence du jury. Je le remercie très fort de l'honneur qu'il me fait.

Je suis même très honoré de ce que Monsieur Pisot ait bien voulu s'intéresser à mon travail et me proposer un second sujet, et je l'en remercie vivement.

Chapitre 1

Schémas d'association à m classes

1.1. Définitions. Premières propriétés.

DEFINITION 1. - Soit E un ensemble fini. Un schéma d'association à m classes associées sur E est constitué par la donnée de $(m + 1)$ relations binaires $S_0, S_1, \ldots, S_m$ définies dans E et vérifiant

(A1) S_0 est la relation d'égalité,

(A2) pour tout $0 \leqslant i \leqslant m$, S_i est symétrique (deux éléments vérifiant S_i sont dits i-associés),

(A3) les ensembles représentatifs de $S_0, S_1, \ldots, S_m$ forment une partition de E^2,

(A4) x et y étant i-associés, **Card** $(S_j(x) \cap S_k(y))$ ne dépend que de $i, j, k = 1, \ldots, m$ (*).

THEOREME 1.1.1. - x *et* y *étant* i-*associés*, **Card**$(S_j(x) \cap S_k(y))$ *ne dépend que de* $i, j, k = 0, 1, \ldots, m$.

DEMONSTRATION. - Cela revient à examiner

$$(S_0(x) \cap S_k(y)) \qquad \text{où} \qquad x \neq y$$

et

$$(S_j(x) \cap S_k(x))$$

Si $x \neq y$, il existe i (unique en vertu de (A3)) tel que x et y soient i-associés. D'autre part $S_0(x) = \{x\}$.

Donc

$$\textbf{Card}\ (S_0(x) \cap S_k(y)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq i \\ 1 & \text{si} \quad k = i. \end{cases}$$

(*) R étant une relation binaire sur E, on définit, comme dans [13] :

$$R(x) = \{ y \in E \mid x\, R\, y \}$$

Par ailleurs on tire immédiatement de (A3)

$$\textbf{Card}\,(S_j(x) \cap S_k(x)) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq j\,.$$

Il reste alors à examiner le cas $k = j$, c'est-à-dire à examiner

$$\textbf{Card}\,(S_j(x))\,.$$

Or, les $(m+1)$ parties $S_k(y)$, où $k = 0, 1, \ldots, m$, forment une partition de E en vertu de (A3). Donc : $S_j(x)$ est réunion des $(m+1)$ parties $S_j(x) \cap S_k(y)$. Ces parties sont deux-à-deux disjointes.

Donc

$$\textbf{Card}\,(S_j(x)) = \sum_{k=0}^{m} \textbf{Card}\,(S_j(x) \cap S_k(y))\,.$$

Prenons $y \neq x$. Il résulte alors de (A4) et de la première partie du théorème que **Card** $(S_j(x))$ ne dépend que de j. Ce qui achève la démonstration.

Nous dégageons le

COROLLAIRE 1.1.1. - **Card** $(S_i(x))$ *ne dépend que de* i.

REMARQUE. - **Card** $(S_i(x))$ n'est jamais nul.

En effet, pour tout $0 \leqslant i \leqslant m$, il existe $x \in E$ tel que $S_i(x) \neq \emptyset$ en vertu de (A3).

NOTATIONS. - Dans toute la suite nous serons fidèles aux notations suivantes

$I = \{1, 2, \ldots, m\}$

$\bar{I} = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$

$v =$ **Card** (E)

$n_i =$ **Card** $(S_i(x))$

En particulier $n_o = 1$.
Et il résulte de la remarque ci-avant que pour tout $0 \leqslant i \leqslant m : n_i \neq 0$.

$p^i_{jk} =$ **Card** $(S_j(x) \cap S_k(y))$ x et y étant i-associés.

Il résulte du théorème 1.1.1 que

$$p^i_{oj} = \delta_{ij} \quad \text{(symbole de Kronecker)}$$

$$p^o_{ij} = n_i \, \delta_{ij} .$$

Il est traditionnel d'écrire les m^3 paramètres p^i_{jk} ($i , j , k = 1 , 2 , \ldots , m$) sous forme de m matrices carrées P_i ($i = 1 , 2 , \ldots , m$) d'ordre m, appelées *matrices d'association*, et définies par $P_i = (p^i_{jk})$.

Il est aussi commode d'introduire les $(m+1)$ matrices d'ordre $(m+1)$

$$\overline{P_i} = (p^i_{jk}) \qquad (i , j , k = 0 , 1 , 2 , \ldots , m) .$$

On a ainsi : $\overline{P_o} = \text{Diag}(1 , n_1 , n_2 , \ldots , n_m)$ ce qui permet à l'occasion de parler de $P_o = \text{Diag}(n_1, n_2, \ldots , n_m)$.

THEOREME 1.1.2. - $p^i_{jk} = p^i_{kj}$.

Les matrices $\overline{P_i}$ *et* P_i *sont donc symétriques.*

On peut en effet permuter x et y dans l'énoncé du théorème 1.1.1 du fait de (A2).

THEOREME 1.1.3. - $\sum_{i=0}^{m} n_i = v$.

En effet (A3) implique que pour un x donné, les $S_i(x)$ forment une partition de E

THEOREME 1.1.4. - $\sum_{j=0}^{m} p^k_{ij} = n_i$,

En effet, on a montré au cours de la démonstration du théorème 1.1.1. que

$$\textbf{Card}\ S_i(x) = \sum_{j=0}^{m} \textbf{Card}\ (S_i(x) \cap S_j(y)) .$$

k est alors l'indice tel que x et y soient k-associés.

THEOREME 1.1.5. - $n_i p_{jk} = n\, p^i_{ik} = n\, p^j_{ij}$.

Il suffit de dénombrer tous les $(y , z) \in E^2$ tels que, x_o étant un élément fixé de E, on ait

x_o et y i-associés ,

x_o et z j-associés ,

y et z k-associés .

On obtient

$$n_i p^i_{jk} = n_j p^j_{ik} ,$$

d'où le théorème.

1.2. Equivalences dans les schemas d'association.

Nous étudions ici les schémas tels que, pour $J \subset \bar{I}$, $\bigcup_{i\in J} S_i$ soit une équivalence (les notations sont encore celles de [13]).

THEOREME 1.2.1.- *Soit* $J \subset \bar{I}$. *Pour que* $\bigcup_{i\in J} S_i$ *soit une équivalence, il faut et il suffit que soient réalisées* (1.2.1.1) *et l'une des deux conditions équivalentes* (1.2.1.2a) *et* (1.2.1.2b) *avec*

(1.2.1.1) $0 \in J$,

(1.2.1.2a) *pour tout* $i \in J$, *tout* $j \in J$ *et tout* $k \in \bar{I}-J$, $p^i_{jk} = 0$

(1.2.1.2b) *pour tout* $i \in J$, *tout* $j \in J$ *et tout* $k \in \bar{I}-J$, $p^k_{ij} = 0$

DEMONSTRATION.- La réflexivité de $\bigcup_{i\in J} S_i$ est équivalente à $S_o \subset \bigcup_{i\in J} S_i$, soit $0 \in J$; d'où (1.2.1.1).

La symétrie de $\bigcup_{i\in J} S_i$ est assurée quel que soit J .

La transitivité de $\bigcup_{i\in J} S_i$ peut s'énoncer

- Pour tout $y \in \left(\bigcup_{i\in J} S_i\right)(x)$, il n'existe aucun $z \in E$ vérifiant

$$z \in \left(\bigcup_{i\in J} S_i\right)(x) \qquad \text{et} \qquad z \notin \left(\bigcup_{i\in J} S_i\right)(y)$$

or,

- pour tout $J \subset \bar{I}$

$$\left(\bigcup_{i\in J} S_i\right)(x) = \bigcup_{i\in J} S_i(x)$$

$$\complement\left(\bigcup_{i\in J} S_i(y)\right) = \bigcup_{j\in \bar{I}-J} S_j(y) \qquad \text{en vertu de (A3).}$$

La transitivité s'énonce donc

- Pour tout $y \in \bigcup_{i \in J} S_i(x)$

$$\left[\bigcup_{i \in J} S_i(x) \right] \cap \left[\bigcup_{j \in \bar{I}-J} S_i(y) \right] = \emptyset .$$

Soit

$$\bigcup_{\substack{i \in J \\ j \in \bar{I}-J}} \left(S_i(x) \cap S_j(y) \right) = \emptyset .$$

Ce qui donne en définitive

- Pour tout $i \in J$ et tout $j \in \bar{I} - J$

$$S_i(x) \cap S_j(y) = \emptyset .$$

dès que

$$y \in \bigcup_{i \in J} S_i(x) .$$

C'est là la condition (1. 2. 1. 2a).

Pour montrer enfin que (1. 2. 1. 2a) équivaut à (1. 2. 1. 2b) il suffit d'utiliser (1. 1. 5)

$$n_i p^i_{jk} = n_k p^k_{ij} .$$

Or, $n_k \neq 0$ (remarque consécutive au corollaire 1. 1. 1).

Le théorème (1. 2. 1) est démontré.

EXEMPLE. - S_o est toujours une équivalence, et $p^0_{0i} = p^i_{00} = 0$ quand $i \neq 0$ (Théorème 1. 1. 1).

Introduisons $O_{r,s}$, matrice nulle à r lignes et s colonnes. On peut alors formuler le théorème 1. 2. 2, plus couramment utilisé dans les applications.

THEOREME 1. 2. 2. - *Pour que* $\bigcup_{i=o}^{p} S$ *soit une équivalence, il faut et il suffit que soit réalisée l'une des deux conditions équivalentes*

(1. 2. 2a) *pour tout* $1 \leqslant i \leqslant p$ $\qquad p_i = \begin{pmatrix} A_i & O_{p,m-p} \\ O_{m-p,p} & B_i \end{pmatrix}$;

(1. 2. 2b) *pour tout* $p+1 \leqslant i \leqslant m$: $P_i = \begin{pmatrix} O_{p,p} & C_i \\ {}^tC_i & D_i \end{pmatrix}$.

En effet, $O \in J$ par définition.

En outre, on a immédiatement (1. 2. 1. 2a) $\Longrightarrow$ (1. 2. 2a).

Inversement (1. 2. 2a) $\Longrightarrow$ (1. 2. 1. 2a) car $\overline{P}_o$ est diagonale, et $p^i_{0\,j} = 0$ quand $j \neq i$ (théorème 1. 1. 1) ; ce qui règle le cas des indices nuls.

On montrerait de même

$$(1.\,2.\,1.\,2b) \Longleftrightarrow (1.\,2.\,2b)\ .$$

D'où l'équivalence

$$(1.\,2.\,2a) \Longleftrightarrow (1.\,2.\,2b)\ .$$

Si deux équivalences sont telles que l'une contient l'autre, nous avons la propriété suivante

THEOREME 1. 2. 3. - *Soit* $K \subset J \subset \bar{I}$.

Si $\bigcup_{i\in K} S_i$ *et* $\bigcup_{i\in J} S_i$ *sont des équivalences, alors*

$$\sum_{i\in K} n_i \;\Big|\; \sum_{i\in J} n_i$$

DEMONSTRATION. - $\bigcup_{i\in K} S_i \subset \bigcup_{i\in J} S_i$

Donc toute classe par rapport à $\bigcup_{i\in J} S_i$ est une réunion de classes par rapport à $\bigcup_{i\in K} S_i$, qui sont deux-à-deux disjointes ou confondues.

Soit $x \in E$. Il existe $x_1 = x$, $x_2, \ldots, x_p$ de E tels que

$$\Big(\bigcup_{i\in J} S_i\Big)(x) = \bigcup_{j=1}^{p} \Big(\bigcup_{i\in K} S_i\Big)(x_j)$$

où $j_1 \neq j_2$ entraîne

$$\Big(\bigcup_{i\in K} S_i\Big)(x_{j_1}) \cap \Big(\bigcup_{i\in K} S_i\Big)(x_{j_2}) = \emptyset$$

d'où

$$\left(\bigcup_{i\in K} S_i\right)(x) = \sum_{j=1}^{p} \textbf{Card}\left(\left(\bigcup_{i\in K} S_i\right)(x_j)\right)$$

Examinons

$$\left(\bigcup_{i\in K} S_i\right)(x_j) = \bigcup_{i\in K} S_i(x_j)$$

x_j étant donné, les $S_i(x_j)$ sont deux-à-deux disjoints en vertu de (A3). : Donc

$$\textbf{Card} \bigcup_{i\in K} S_i(x_j) = \sum_{i\in K} \textbf{Card}\,(S_i(x_j)) = \sum_{i\in K} n_i$$

Revenant alors à l'égalité précédente, on obtient

$$\sum_{i\in J} n_i = p \sum_{i\in K} n_i$$

Le théorème est démontré.

APPLICATION. - *Schémas tels que, pour tout* $O \leqslant p \leqslant m$, $\bigcup_{i=0}^{p} S_i$ *soit une équivalence.*

Ces schémas sont caractérisés, en vertu du théorème 1. 2. 2, par des matrices d'association de la forme

$$P_i = \begin{pmatrix} O_{i-1,i-1} & {}^tA_i & O_{i-1,m-i} \\ A_i & a_i & O_{1,m-i} \\ O_{m-i,i-1} & O_{m-i,1} & B_i \end{pmatrix}$$

où

$$A_i = (n_1\ n_2\ \ldots\ n_{i-1})$$

$$B_i = \mathrm{Diag}(n_{i+1}, n_{i+2}, \ldots, n_m)$$

$$a_i = n_i - \sum_{j=0}^{i-1} n_j$$

En effet, la présence des différents O dans P_i s'obtient par application directe du théorème 1. 2. 2. Le seul terme non nul de la $j^{ème}$ colonne de P_i (où $1 \leqslant j \leqslant i-1$) est donc à la $i^{ème}$ ligne. Il résulte alors du théorème 1. 1. 4 que ce terme est égal à n_j.

De même le seul terme non nul de la jème colonne (où $i+1 \leqslant j \leqslant m$) est à la jème ligne. Le théorème 1.1.4 entraîne encore que ce terme est égal à n_j .

On tire enfin la valeur de a_i en appliquant encore le théorème 1.1.4 au cas $k = i$

$$\sum_{j=0}^{m} p_{ij}^{i} = n_i .$$

Soit

$$\sum_{j=0}^{i-1} n_j + a_i = n_i .$$

Nous savons de plus (théorème 1.2.3) que

$$i \leqslant j \quad \text{entraîne} \quad \sum_{k=0}^{i} n_k \Big| \sum_{k=0}^{j} n_k .$$

Remarquons que la division est stricte si $i < j$ car toute classe par rapport à $\bigcup_{k=0}^{j} S_k$ est alors réunion de plus d'une classe par rapport à $\bigcup_{k=0}^{i} S_k$.

Soit v_i l'entier tel que $\quad v_i \sum_{k=0}^{i-1} n_k = \sum_{k=0}^{i} n_k$

(pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, $v_i \geqslant 2$) .

On a alors $\quad \sum_{k=0}^{i} n_k = \prod_{k=0}^{i} v_k \quad ;$

d'où

$$v = \sum_{k=0}^{m} n_k = \prod_{k=1}^{m} v_k$$

$$n_i = (v_i - 1) \prod_{k=1}^{i-1} v_k .$$

De tels schémas seront désormais appelés GD *à* m *classes associées* pour respecter la notation de [23] .

1.3. La réduction du nombre de classes associées.

Soit une partition de I en p sous-ensembles $I_1 , I_2 , \ldots , I_p$.

Posons $\quad R_o = S_o \qquad R_u = \bigcup_{i \in I_u} S_i \qquad$ pour $1 \leqslant u \leqslant p$.

A quelles conditions (portant sur les paramètres du schéma) les $(p+1)$ relations R_0 , R_1 , R_2 ,... , R_p définissent-elles sur E un nouveau schéma d'association à $(p+1)$ classes associées ?

La réponse est donnée par le

THEOREME 1.3.1. - *Pour que les* $(p+1)$ *relations* R_0 , R_1 , R_2 ,... , R_p *déterminent sur* E *un nouveau schéma d'association, il faut et il suffit que, quels que soient* u , v , w = 1 , 2 ,... , p,

$$\sum_{\substack{j\in I_v \\ k\in I_w}} p_{jk}^{i} \quad \textit{soit constant quand} \quad i \quad \textit{décrit} \quad I_u \ .$$

DEMONSTRATION. - Tout d'abord, on constate immédiatement que, quelle que soit lappartition de I , (A1) , (A2) et (A3) sont vérifiés.

Il reste à examiner le cas de (A4).

Soient donc deux éléments de E , x et y , u-associés par rapport aux nouvelles relations, c'est-à-dire qu'il existe $i_o \in I_u$ tel que x et y soient i_o-associés dans l'ancien schéma.

$$R_v(x) \cap R_w(y) = \left[\bigcup_{j\in I_v} S_j(x) \right] \cap \left[\bigcup_{k\in I_w} S_k(y) \right]$$

$$= \bigcup_{\substack{j\in I_v \\ k\in I_w}} (S_j(x) \cap S_k(y))$$

Or les $S_j(x) \cap S_k(y)$ sont deux-à-deux disjoints. En effet

$$S_{j_1}(x) \cap S_{j_2}(x) = \emptyset$$

quand $j_1 \neq j_2$ en vertu de (A3).

Donc

$$(S_{j_1}(x) \cap S_{k_1}(y)) \cap (S_{j_2}(x) \cap S_{k_2}(y)) = \emptyset$$

quels que soient k_1 et k_2 .

Donc

$$\textbf{Card}\,(R_v(x) \cap R_w(y)) = \sum_{\substack{j\in I_v \\ k\in I_w}} \textbf{Card}\,(S_j(x) \cap S_k(y))$$

$$= \sum_{\substack{j\in I_v \\ k\in I_w}} p_{jk}^{i_o}$$

Ce nombre ne doit dépendre que de u , v , w .

D'où le théorème 1.3.1.

Il est commode, pour la suite, d'associer à toute partition Π de I en sous ensembles I_1 , I_2 ,... , I_p l'application F_Π définie comme suit.

DEFINITION 2. - $A = (a_{ij})$ étant une matrice d'ordre m , on pose

$$F_\Pi(A) = (b_{uv})$$

où

$$b_{uv} = \sum_{\substack{i \in I_u \\ j \in I_v}} a_{ij} .$$

THEOREME 1.3.2. - *Pour que les* $(p+1)$ *relations* $R_o, R_1, R_2, \ldots, R_p$ *déterminent sur* E *un nouveau schéma d'associations, il faut et il suffit que, pour tout* $1 \leqslant u \leqslant p$, $F_\Pi(P_i)$ *reste constant quand* i *décrit* I_u .

En outre les matrices d'association du nouveau schéma sont les p *matrices* $F_\Pi(P_{i_u})$ *où* i_u *est un élément quelconque de* I_u *et* $u = 1, 2, \ldots, p$.

En effet $\sum_{\substack{j \in I_v \\ k \in I_w}} p^i_{jk}$ est l'élément de la v-ième ligne et de la w-ième colonne de $F_\Pi(P_i)$.

Les conditions ci-dessus se simplifient considérablement quand il s'agit d'examiner si plusieurs classes peuvent se confondre en une seule

THEOREME 1.3.3. - *Pour que les* h *classes associées d'indices* $i_1, i_2, \ldots, i_h$ *puissent se confondre en une seule. il faut et il suffit que les* h *matrices carrées d'ordre* $(m-1)$ *obtenues comme restrictions de* P_{i_1} , P_{i_2} ,... , P_{i_h} *aux lignes et colonnes d'indices différents de* i_1 , i_2 ,... , i_h *soient égales.*

(On pourrait dire de façon plus imagée : *il faut et il suffit que les* h *matrices obtenues en biffant dans* P_{i_1} , P_{i_2} ,... , P_{i_h} *les lignes et les colonnes d'indices* i_1 , i_2 ,... , i_h *soient égales*).

DEMONSTRATION. - Supposons pour la commodité de l'écriture que

$$\{i_1 , i_2 , \ldots , i_h\} = \{p , p+1 , \ldots , m\} .$$

On est alors amené à se poser le problème de la réduction du du nombre de classes pour la partition

$$I_u = \{u\} \quad \text{quand} \quad 1 \leqslant u \leqslant p-1$$

$$I_p = [p\ ,\ m\ ] .$$

La condition à réaliser (théorème 1.3.2) se réduit alors à

$$F(P_p) = F(P_{p+1}) = \ldots = F(P_m) \qquad (1.3.3.1)$$

en désignant par F l'application F_Π du cas général.

A étant une matrice carrées d'ordre $\geqslant n$, introduisons $G_n(A)$ matrice carrée d'ordre n restriction de A à ses n premières lignes et n premières colonnes.

La condition à réaliser est alors équivalente à

$$G_{p-1}(P_p) = G_{p-1}(P_{p+1}) = \ldots = G_{p-1}(P_m) . \qquad (1.3.3.2)$$

En effet, remarquons d'abord que la matrice particulière de la partition fait que, pour tout i

$$G_{p-1}(P_i) = G_{p-1}(F(P_i)) .$$

L'implication $(1.3.3.1) \Longrightarrow (1.3.3.2)$ est alors immédiate.

Montrons $(1.3.3.2) \Longrightarrow (1.3.3.1)$.

Les $(p-1)$ premiers éléments de la p-ième ligne (ou p-ième colonne) de $F(P_i)$ sont

$$\sum_{k=p}^{m} p^i_{jk}$$

où $j = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ p-1$.

Par ailleurs l'élément de la p-ième et p-ième colonne de $F(P_i)$ est

$$\sum_{j=p}^{m} \sum_{k=p}^{m} p^i_{jk} .$$

Or, le théorème 1.1.4 donne

$$\sum_{k=p}^{m} p^i_{jk} = n_j - \sum_{k=1}^{p-1} p^i_{jk}$$

(avec $i \neq j$) et

$$\sum_{j=p}^{m} \sum_{k=p}^{m} p_{jk}^{i} = \sum_{j=p}^{m} n_j - 1 - \sum_{k=1}^{p-1} p_{jk}^{i}$$

(quand $p \leqslant i \leqslant m$) .

Si (1.3.3.2) est vraie les seconds membres de ces égalités sont constants quand $p \leqslant i \leqslant m$.

Le théorème 1.3.3 est démontré.

Enonçons encore le

THEOREME 1.3.4. - *Pour que les* $(p+1)$ *relations* $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_p$ *déterminent sur* E *un nouveau schéma d'association, il suffit que, pour tout* $1 \leqslant u \leqslant p$, *on puisse appliquer avec succès le critère constitué par le théorème* 1.3.3 *à* $I_u = \{i_1, i_2, \ldots, i_h\}$.

La démonstration résulte très simplement du rapprochement des théorèmes 1.3.2 et 1.3.3.

1.4. L'algèbre du schéma.

E étant fini, nous le supposerons, dans tout ce paragraphe, totalement ordonné de façon immuable.

Ainsi la fonction caractéristique de l'ensemble représentatif de S_i pourra être représentée par une matrice carrée d'ordre v , dont les éléments seront 0 ou 1 , que nous noterons B_i .

On a alors les propriétés

- $B_o = I_v$ (matrice unité d'ordre v) en vertu de (A1)
- Pour tout $0 \leqslant i \leqslant m$, B_i est symétrique, conséquence de (A2).
- $\sum_{i=0}^{m} B_i = J_v$ (matrice dont tous les éléments sont égaux à 1) du fait de (A3).

Introduisons aussi les $(m+1)$ matrices carrées d'ordre $(m+1)$

$$Q_i = (p_{ik}^{j}) \quad \text{où} \quad i, j, k = 0, 1, 2, \ldots, m$$

(l'indice supérieur étant celui de la colonne).

Nous désignerons les $(m+1)$ valeurs propres de Q_i par a_{i_0} , a_{i_1} , ... , a_{i_n} .

DEFINITION 3. - Etant donné un schéma d'association à m classes, on appelle algèbre du schéma l'algèbre $\mathcal{A}$ sur l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs définis par

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=0}^{m} \mathbf{Z}\, e_i$$

avec

$$e_i\, e_j = \sum_{k=0}^{m} p_{ij}^{k}\; e_k \ .$$

Il reste à montrer que c'est effectivement une algèbre. Le problème est alors celui de l'associativité de la loi multiplicative qu'il suffit de vérifier sur les différents produits (e_i) . Or, ces relations sont équivalentes [7] à

$$\sum_{h=0}^{m} p_{ij}^{h}\; p_{hk}^{l} = \sum_{h=0}^{m} p_{ih}^{l}\; p_{jk}^{h}$$

quels que soient i , j , k , l .

La démonstration de cette propriété fait l'objet du théorème 1. 4. 2.

Cette algèbre est en outre commutative (en vertu du théorème 1. 1. 2) et possède un élément unité : e_o , puisque $p_{oj}^{i} = \delta_{ij}$.

THEOREME 1. 4. 1. - $B_i B_j = \sum_{h=0}^{m} p_{ij}^{k}\; B_k$

quels que soient les indices $i , j = 0 , 1 , \ldots , m$.

DEMONSTRATION. - Il suffit, compte tenu de la nature des B_i , de prouver que le terme b_{xy} de la x-ième ligne et de la y-ième colonne de $B_i B_j$ est égal à p_{ij}^{k} si x et y sont k-associés.

Désignant par φ_A la fonction caractéristique de la partie A de E , nous avons, du fait que E est ordonné comme mentionné au début du paragraphe

$$\varphi_{S_i(x)}\ (E) = \text{x-ième ligne de } B_i$$

$$\varphi_{S_i(y)}\ (E) = \text{y-ième colonne de } B_j \ .$$

Donc

$$b_{xy} = \sum_{z \in E} \varphi_{S_i(x)}(z)\ .\ \varphi_{S_j(y)}(z) \ .$$

Or, on a toujours

$$\varphi_A \cdot \varphi_B = \varphi_{A \cap B} .$$

Donc

$$\begin{aligned} b_{xy} &= \sum_{z \in E} \varphi_{S_i(x) \cap S_j(y)}(z) \\ &= \mathbf{Card}\,(S_i(x) \cap S_j(y)) \\ &= p_{ij}^k \end{aligned}$$

puisque x et y sont supposés k-associés.

THEOREME 1.4.2. - $\sum_{h=0}^{m} p_{ij}^h \, p_{hk}^l = \sum_{h=0}^{m} p_{ih}^l \, p_{jk}^h$.
quels que soient les indices i , j , k , l = 0 , 1 ,... , m .

On a, en effet, dans $M_v(\mathbf{Z})$ (*)

$$B_i(B_j \, B_k) = (B_i \, B_j) \, B_k$$

quels que soient i , jk . Or

$$\begin{aligned} B_i(B_j \, B_k) &= B_i\Big(\sum_{h=0}^{m} p_{jk} \, B_h\Big) \\ &= \sum_{h=0}^{m} p_{jk}^h \, B_i \, B_h \\ &= \sum_{h=0}^{m} p_{jk}^h \, \Big(\sum_{l=0}^{m} p_{ih}^l \, B_l\Big) \\ &= \sum_{l=0}^{m} \Big(\sum_{h=0}^{m} p_{jk}^h \, p_{ih}^l\Big) B_l . \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (B_i \, B_j) \, B_k &= \Big(\sum_{h=0}^{m} p_{ij}^h \, B_h\Big) B_k \\ &= \sum_{h=0}^{m} p_{ij}^h \, B_h \, B_k \\ &= \sum_{h=0}^{m} p_{ij}^h \, \Big(\sum_{l=0}^{m} p_{hk}^l \, B_l\Big) \\ &= \sum_{l=0}^{m} \Big(\sum_{h=0}^{m} p_{ij}^h \, p_{hk}^l\Big) B_l . \end{aligned}$$

(*) $M_n(\mathbf{Z})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients entiers relatifs.

Or, la famille (B_i) est libre, car $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_i = 0$ entraîne $\alpha_i = 0$ quel que soit i, du fait que les éléments de la matrice $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_i$ sont justement les α_i.

Le théorème 1.4.2 en résulte.

REMARQUE. - Le théorème 1.1.5 est un cas particulier du théorème 1.4.2, obtenu en faisant $l = 0$.

THEOREME 1.4.3. - *L'application* $e \rightsquigarrow Q_i$ *définit un homomorphisme injectif de* $\mathcal{A}$ *dans* $M_{n+1}(\mathbf{Z})$.

En effet, l'élément situé à la l-ième ligne et à la k-ième colonne de $Q_i Q_j$ est $\sum_{h=0}^{n} p_{ih}^{l} \, p_{jk}^{h}$.

Or, en vertu du théorème 1.4.2, cet élément s'écrit encore : $\sum_{h=0}^{n} p_{ij}^{h} \, p_{hk}^{l}$ qui est l'élément de la l-ième ligne et de la k-ième colonne de $\sum_{h=0}^{n} p_{ij}^{h} \, Q_h$. On a donc

$$Q_i \, Q_j = \sum_{h=0}^{n} p_{ij}^{h} \, Q_h$$

et $e_i \rightsquigarrow Q_i$ définit bien un homomorphisme.

Pour montrer qu'il est injectif, remarquons que la première ligne de la matrice $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i Q_i$ est la sous-matrice $(\alpha_0 \, \alpha_1 \, \alpha_2 \, \ldots \, \alpha_n)$.

Donc $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i Q_i = 0$ entraîne $\alpha_i = 0$ pour tout i, et la famille (Q_i) est libre.

Une conséquence de l'étude qui précède est que les ensembles $\mathcal{A}$, $\bigoplus_{i=0}^{n} \mathbf{Z} B_i$ et $\bigoplus_{i=0}^{n} \mathbf{Z} Q_i$ sont isomorphes en tant qu'algèbres sur $\mathbf{Z}$.

THEOREME 1.4.4. - *Tout élément de* $\mathcal{A}$ *est solution d'une équation algébrique (à coefficients rationnels qu'on peut rendre entiers) de degré inférieur ou égal à* $(n + 1)$.

Les matrices $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_i$ *et* $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i Q_i$ *ont mêmes valeurs propres.*

En particulier toute matrice de $\bigoplus_{i=0}^{m} \mathbf{Z}\, B_i$ *a au plus* $(m+1)$ *valeurs propres distinctes.*

Soit $a \in \mathcal{A}$. Pour tout entier n on a

$$a^n = \sum_{i=0}^{m} \alpha_{ni}\, e_i$$

(avec $\alpha_{oi} = \delta_{oi}$) .

Les $(m+2)$ combinaisons linéaires $\sum_{i=0}^{m} \alpha_{ni}\, e_i$ (où $n = 0, 1, 2, \ldots, m, m+1$) peuvent être considérées comme combinaisons linéaires de l'espace vectoriel $\bigoplus_{i=0}^{m} \mathbf{Q}\, e_i$ dans lequel $\mathcal{A}$ est canoniquement plongé. Elles ne sont donc pas indépendantes et il existe un polynôme de $\mathbf{Q}[X]$ de degré inférieur ou égal à $(m+1)$ annulé par a .

Il en résulte que les polynômes minimaux de $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i\, B_i$ et $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i\, Q_i$ sont les mêmes et de degré inférieur ou égal à $(m+1)$.

Ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE 1.4.4. - a_{ij} *est réel quels que soient* $i, j = 0, 1, \ldots, m$.

En effet a_{ij} , valeur propre de Q_i , est aussi valeur propre de B_i . Or, B_i est symétrique réelle. D'où le résultat.

THEOREME 1.4.5. - *Pour tout* $i = 0, 1, \ldots, m$, *on peut ordonner les* a_{ij} *de telle sorte que*

(1.4.5.1) *Les valeurs propres de* $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i\, Q_i$ *soient* $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i\, a_{ij}$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$.

(1.4.5.2) $a_{ik}\, a_{jk} = \sum_{l=0}^{m} p_{ij}^{l}\, a_{lk}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$.

C'est une conséquence d'un théorème de Frobenius [21] disant que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des matrices carrées sur le corps commutatif K , deux-à-deux permutables, on peut ordonner les valeurs propres a_{ij} de chaque matrice A_i de telle sorte que, pour toute fonction rationnelle f appartenant à $K(X_1, \ldots, X_n)$, les valeurs propres de $f(A_1, \ldots, A_n)$ soient les $f(a_{1j}, \ldots, a_{nj})$.

Ici les matrices $Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$ sont deux-à-deux permutables, et on applique le théorème à la fonction

$$f(X_0, \ldots, X_m) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i X_i$$

et aux deux fonctions (égales dans $\mathcal{A}$ en vertu de la définition 3)

$$X_i X_j \qquad \text{et} \qquad \sum_{l=0}^{m} p_{ij}^{l} X_l .$$

THEOREME 1.4.6. - *La matrice* (a_{ij}) *est inversible (on suppose que, pour tout* $i = 0, 1, \ldots, m$, *les* a_{ij} *sont ordonnés comme il convient dans le théorème* 1.4.5).

DEMONSTRATION. - Il suffit de montrer que toute solution réelle $x_0, x_1, \ldots, x_m$ du système

$$\sum_{i=0}^{m} a_{ij} x_i = 0 \qquad \text{où} \qquad j = 0, 1, \ldots, m$$

est nécessairement nulle.

Il résulte du théorème 1.4.5 que $\sum_{i=0}^{m} a_{ij} x_i$ est valeur propre de $B = \sum_{i=0}^{m} x_i B_i$ puisque les a_{ij} ont été ordonnés convenablement. B a donc toutes ses valeurs propres nulles. Il s'ensuit que son polynôme caractéristique p_B a tous ses coefficients nuls.

Or : $\mathrm{Tr}\, B = v\, x_0$ car les seuls termes diagonaux de B proviennent de $x_0 B_0$. On doit donc avoir $v_0 = 0$, donc : $x_0 = 0$, pour toute solution du système ci-dessus.

Evaluons maintenant le coefficient du terme de degré $(v - 2)$. Il s'obtient à partir des mineurs d'ordre 2 et B ayant pour éléments diagonaux les différents éléments diagonaux de B. Ces mineurs sont donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & x_i \\ x_i & 0 \end{pmatrix}$ du fait que B_i est symétrique et que $x_0 = 0$. Un tel mineur intervient autant de fois qu'il y a de termes différents de 0 au-dessus de la diagonale de B_i, soit $\frac{v\, n_i}{2}$. Le coefficient du terme de degré $(v - 2)$ de p_B est donc : $\frac{v}{2} \sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2$.

Ce coefficient doit être nul. Or, pour tout i, n est différent de 0 (remarque suivant le corollaire 1.1.1). Les x_i étant réels on a donc nécessairement

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$$

Le théorème 1.4.6 est démontré.

THEOREME 1.4.7. - *Le polynôme caractéristique de toute matrice* B *de* $\bigoplus_{i=0}^{m} \mathbf{R}\, B_i$ *se met sous la forme*

$$p_B(X) = \prod_{i=0}^{m} (X - \beta_i)^{r_i}$$

où r_i *ne dépend que du schéma d'association.*

DEMONSTRATION. - Montrons tout d'abord qu'il existe toujours une matrice de $\bigoplus_{i=0}^{m} \mathbf{R}\, B_i$ admettant comme valeurs propres un ensemble de nombres réels γ_0, γ_1, ..., γ_m donné à l'avance, c'est-à-dire qu'on peut toujours résoudre le système

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i\, a_{ij} = \gamma_j \qquad \text{où} \qquad j = 0, 1, \ldots, m$$

ce qui est le cas puisque (a_{ij}) est inversible.

Soit C une matrice de $\bigoplus_{i=0}^{m} \mathbf{R}\, B_i$ telle que ses valeurs propres soient deux-à-deux distinctes. Le polynome minimal de C est donc de degré $(m+1)$. Il s'ensuit que les $(m+1)$ combinaisons linéaires de $\bigoplus_{i=0}^{m} \mathbf{R}\, B_i$

$$\sum_{i=0}^{m} C_{ij}\, B_i = C^j \qquad \text{où} \qquad j = 0, 1, \ldots, m$$

sont indépendantes. On peut donc résoudre en B_i le système ci-dessus (les techniques de résolution sont applicables même si inconnues et "second membre" sont non plus scalaires mais éléments d'un même espace vectoriel).

Il existe alors $q_i(X) \in \mathbf{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à m, tel que

$$B_i = q_i(C) .$$

Posant

$$q(X) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \, q_i(X) ,$$

on a

$$B = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \, B_i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \, q_i(C) = q(C) .$$

Le polynome caractéristique de C étant

$$p_C(X) = \prod_{i=0}^{m} (X - \gamma_i)^{r_i} ,$$

le polynôme caractéristique de B s'écrit [9]

$$p_B(X) = p_{q(C)}(X) = \prod_{i=0}^{m} (X - q(\gamma_i))^{r_i} .$$

Ce qui achève la démonstration.

THEORÈME 1.4.8. - *Si les ordres de multiplicité des diverses valeurs propres d'une matrice de* $\bigoplus_{i=0}^{n} \mathbf{Z} \, B_i$ *sont deux à deux distincts, les valeurs propres sont des entiers relatifs.*

DEMONSTRATION. - Le polynôme caractéristique de toute matrice $\bigoplus_{i=0}^{n} \mathbf{Z} \, B_i$ est un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$.

Il s'agit alors de montrer que si $p(X)$ est un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ dont les racines ont des ordres de multiplicité deux à deux distincts, alors il se décompose dans $\mathbf{Z}[X]$ en facteurs unitaires du premier degré.

On a, bien entendu

$$p(X) \in \mathbf{Q}[X] .$$

$\mathbf{Q}[X]$ étant factoriel, $p(X)$ s'écrit (de façon unique)

$$p(X) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{m_i}(X)$$

où les $p_i(X)$ sont premiers entre eux, unitaires, irréductibles.

Toute racine de $p(X)$ est racine d'un $p_i(X)$ et d'un seul, car [13] deux polynomes premiers entre eux dans $K[X]$ (K corps commutatif) n'ont de racine commune dans aucun sur corps de K.

$p(X)$ est unitaire de $\mathbf{Z}[X]$. Les $p_i(X)$ sont unitaires de $\mathbf{Q}[X]$. Donc, en vertu d'un théorème de Gauss [13] , les $p_i(X)$ appartiennent à $\mathbf{Z}[X]$ (dont ils sont unitaires).

$\mathbf{Q}$ étant de caractéristiques O , $p_i(X)$ n'admet que les racines simples [8]. Si $p_i(X)$ était de degré supérieur à 1 , il aurait au moins deux racines distinctes, qui seraient donc multiples d'ordre m_i de $p(X)$, contrairement à l'hypothèse.

Chapitre 2

Étude particulière des schémas à deux classes

Dans ce chapitre, à i appartenant à I nous associerons l'indice i^* tel que $\{i, i^*\} = \{1, 2\}$.

2.1. Propriétés générales.

THEOREME 2.1.1. - *Pour que les relations* S_o, S_1, S_2 *déterminent sur* E *un schéma d'association il faut et il suffit que* (A1), (A2) (A3) *soient vérifiés et qu'il existe des indices* i, j, k, l, h, *tels que* (2.1.1a) *ou* (2.1.1b) *soient vraies avec*

(2.1.1a)
- **Card** $(S_i(x))$ *ne dépend que de* i.
- x *et* y *étant* i*-associés* **Card** $(S_j(x) \cap S_k(y))$ *ne dépend que de* i, j, k.
- x *et* y *étant* i^**-associés* **Card** $(S_l(x) \cap S_h(y))$ *ne dépend que de* i, l, h.

(2.1.1b)
- x *et* y *étant* i*-associés* **Card** $(S_j(x) \cap S_k(y))$ *et* **Card** $(S_j(x) \cap S_k^*(y))$ *ne dépendent que de* i, j, k.
- x *et* y *étant* i^**-associés* **Card** $(S_l(x) \cap S_k(y))$ *ne dépend que de* i, l, h.

DEMONSTRATION. - En vertu de (A1) et (A3) les ensembles $\{x\}$, $S_i(x)$, $S_{i^*}(x)$ forment une partition de E. Donc

$$v = 1 + \textbf{Card}\,(S_i(x)) + \textbf{Card}\,(S_{i^*}(x))$$

De même $S_j(x)$ est réunion des parties $S_j(x) \cap \{y\}$, $S_j(x) \cap S_k(y)$, $S_j(x) \cap S_{k^*}(y)$ qui sont deux à deux disjointes.

En supposant x et y i-associés, on a donc

$$\textbf{Card}\ (S_j(x)) = \delta_{ij} + \textbf{Card}\ (S_j(x) \cap S_k(y)) + \textbf{Card}\ (S_j(x) \cap S_{k^*}(y))$$

Désignons cette égalité par E(i , j , k) .

Supposons (2. 1. 1a) vrai. Il résulte de la première égalitéé que, quel que soit i , **Card** $(S_i(x))$ ne dépend que de i . Appliquant alors successivement E(i , j , k) , E(i , k , j) , E(i , j^*, k) on obtient

x et y étant i-associés, **Card** $(S_j(x) \cap S_{k^*}(y))$, **Card** $(S_{j^*}(x) \cap S_k(y))$, **Card** $(S_{j^*}(x) \cap S_{k^*}(y))$ ne dépendent que de i , j , k .

Il reste ensuite a recommencer le même raisonnement après remplacement de i par i^* pour obtenir (A4).

Supposons maintenant (2. 1. 1b) vrai. Il résulte de E(i , j , k) que **Card** $(S_j(x))$ ne dépend que de j . Ce qui nous ramène aux hypothèses (2. 1. 1a).

Et le théorème 2. 1. 1 est démontré.

REMARQUE. - On serait tenté de se demander si (A1), (A2), (A3) et les deux prèmières conditions de (2.1.1a) entraînent la troisième. Il n'en est rien ainsi qu'il apparaît sur le contrexemple suivant :

Soit E un ensemble de 7 éléments que nous identifions à $\mathbf{Z}/(7)$.

Posons alors

$$S_1(0) = \{2 , 5\}$$

(donc : $S_2(0) = \{1 , 3 , 4 , 6\}$) et, pour tout x de E :

$$S_i(x) = x + S_i(0) .$$

Il en résulte immédiatement que (A1), (A2), (A3) et la première condition de (2. 1. 1a) sont vraies.

On vérifie que, si x et y sont 1-associés, **Card**$(S_j(x) \cap S_k(y))$ ne dépend que de j , k .

Par contre, 0 et 1 sont 2-associés, de même que 0 et 3 et on a

$$\textbf{Card}\ (S_2(0) \cap S_2(1)) = \textbf{Card}\ (\{4\}) = 1$$

$$\textbf{Card}\ (S_2(0) \cap S_2(3)) = \textbf{Card}\ (\{4 , 6\}) = 2$$

Les autres résultats du paragraphe 1.1.1 s'écrivent désormais

(2. 1. 2a) $1 + n_1 + n_2 =$

(2. 1. 2b) $1 + p_{11}^1 + p_{12}^1 = p_{11}^2 + p_{12}^2 = n_1$

$1 + p_{12}^2 + p_{22}^2 = p_{12}^1 + p_{22}^1 = n_2$

(2. 1. 2c) $n_1 p_{12}^1 = n_2 p_{11}^2$

$n_1 p_{22}^1 = n\ p_{12}^2$

et les matrices $\overline{P}_o$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ sont données par

$$\overline{P}_o = \text{Diag } (1 , n_1 , n_2)$$

$$\overline{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & p_{11}^1 & p_{12}^1 \\ 0 & p_{12}^1 & p_{22}^1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ 1 & p_{12}^2 & p_{22}^2 \end{pmatrix}$$

THEOREME 2. 1. 2. - *Des paramètres* p_{jk}^i *étant donné par* $\overline{P}_o, \overline{P}_1, \overline{P}_2$, *posons* $e_i e_j = p_{ij}^o\ e_o + p_{ij}^1\ e_1 + p_{ij}^2\ e_2$: *alors* $\mathbf{Z}\, e_o \oplus \mathbf{Z}\, e_1 \oplus \mathbf{Z}\, e_2$ *est une algèbre commutative si les relations* (2. 1. 2b) et (2. 1. 2c) *sont vérifiées.*

DEMONSTRATION. - La loi multiplicative est commutative car $e_i e_j = e_j e_i$ étant donné le choix des p_{jk}^i . En outre e_o est une unité pour cette loi. L'associativité de la loi multiplicative est alors équivalente aux deux égalités

$$e_1 (e_1 e_2) = (e_1^2)\ e_2$$

$$e_2 (e_2 e_1) = (e_2^2)\ e_1$$

qui sont elles-mêmes équivalentes à (2. 1. 2c), (2. 1. 2d) et (2. 1. 2e) avec

(2. 1. 2d) $p_{12}^1\ p_{12}^2 = p_{22}^1\ p_{11}^2$

(2. 1. 2e) $n_1 = p_{11}^2\ (p_{12}^1 - p_{11}^2) + p_{12}^2\ (p_{12}^2 - p_{11}^1)$

$n_2 = p_{22}^1\ (p_{12}^2 - p_{11}^1) + p_{12}^1\ (p_{12}^1 - p_{22}^2)$

Or (2. 1. 2d) et (2. 1. 2e) sont conséquences de (2. 1. 2b) et (2. 1. 2c).

REMARQUE. - On peut dire, après le théorème 2. 1. 1 et les égalités 2. 1. 2 que les paramètres d'un schéma s'association à 2 classes dépendent de 3 d'entre eux qui peuvent être pris "largement arbitraires".

THEOREME 2. 1. 3. - *Pour que des paramètres* p^i_{jk} *donnés par* $\overline{P}_o$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ *soient paramètres d'un schéma d'association à 2 classes il faut que soit réalisée l'une des deux conditions*

(2. 1. 3a) $(p^1_{12} + p^2_{12} + 1)^2 - 4\, p^1_{12}\, p^2_{12}$ *est un carré parfait.*

(2. 1. 3b) $p^1_{12} = p^2_{12}$ *et* $n_1 = n_2$

(*dans ce cas il existe un entier* p *tel que* $v = 4p + 1$).

DEMONSTRATION. - On sait (théorème 1. 4. 7) que les ordres de multiplicité r_o , r_1 , r_2 des valeurs propres de la matrice $B = \alpha_o B_o + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$ ne dépendent que du schéma. Déterminons ces ordres de multiplicité en cherchant d'abord les valeurs propres de B . Ces valeurs propres sont (théorème 1. 4. 5) $\alpha_o a_{oj} + \alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j}$ (j = 0 , 1 , 2) où les a_{ij} sont les valeurs propres convenablement ordonnées de Q_i .

Le calcul donne les valeurs propres de Q_i (i = 1 , 2)

$$n_i \ , \ \frac{1}{2}\,(p^{i*}_{12} - p^i_{12} - 1 + \sqrt{D}) \ , \ \frac{1}{2}\,(p^{i*}_{12} - p^i_{12} - 1 + \sqrt{D})$$

où

$$D = (p^1_{12} + p^2_{12} + 1)^2 - 4\, p^1_{12}\, p^2_{12}$$

Comme les valeurs propres de Q_o sont 1, 1, 1 et celles de $Q_o + Q_1 + Q_2$ sont v , 0 , 0 (ce qui se vérifie immédiatement), la façon d'ordonner les a_{ij} se trouve imposée sans ambigüité par le théorème 1. 4. 5 appliqué à $Q_o + Q_1 + Q_2$

$$a_{00} = 1 \qquad a_{01} = 1 \qquad a_{02} = 1$$

$$a_{10} = n_1 \qquad a_{11} = \frac{1}{2}\,(p^2_{12} - p^1_{12} - 1 + \sqrt{D}) \qquad a_{12} = \frac{1}{2}\,(p^2_{12} - p^1_{12} - 1 + \sqrt{D})$$

$$a_{20} = n_2 \qquad a_{21} = \frac{1}{2}\,(p^1_{12} - p^2_{12} - 1 + \sqrt{D}) \qquad a_{22} = \frac{1}{2}\,(p^1_{12} - p^2_{12} - 1 + \sqrt{D})$$

Par ailleurs remarquons que $r_o = 1$ (c'est en fait une propriété indépendante du nombre de classes du schéma) ; En effet

Soient trois nombres α_o , α_1 , α_2 positifs et tels que $\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Alors la matrice $\alpha_o B_o + \frac{\alpha_1}{n_1} B_1 + \frac{\alpha_2}{n_2} B_2$ est une matrice stochastique, et on sait qu'une telle matrice admet 1 comme valeur propre d'ordre 1 [10], ce qui donne bien $r_o = 1$ $\left(\text{car la valeur propre 1 correspond à l'indice 0 du fait que } 1 = \alpha_0 a_{00} + \frac{\alpha_1}{n_1} a_{10} + \frac{\alpha_2}{n_2} a_{20}\right)$.

Pour calculer r_1 et r_2 , utilisons la relation

$$T_r B_1^n = r_o a_{10}^n + r_1 a_{11}^n + r_2 a_{12}^n$$

où on fait $n = 0$ puis $n = 1$

$$T_r B_1^o = T_r I_v = v = 1 + r_1 + r_2$$

$$T_r B_1 = 0 = n_1 + r_1 a_{11} + r_2 a_{12}$$

On obtient

$$r_1 = \frac{n_1 + n_2}{2} - \frac{1}{2\sqrt{D}} \left[n_1 - n_2 + (p_{12}^2 - p_{12}^1)(n_1 + n_2) \right]$$

$$r_2 = \frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{D}} \left[n_1 - n_2 + (p_{12}^2 - p_{12}^1)(n_1 + n_2) \right]$$

Or r_1 et r_2 doivent être entiers.

Donc, si le crochet est différent de O , D doit être un carré parfait. D'où (2. 1. 3a).

Si le crochet est nul, on a

$$p_{12}^2 - p_{12}^1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Or $n_i \neq 0$. Donc $|p_{12}^2 - p_{12}^1| < 1$.

La seule valeur entière possible pour $p_{12}^2 - p_{12}^1$ est alors 0.

D'où $p_{12}^2 = p_{12}^1$ et par suite : $n_1 = n_2$.

Posons alors $p = p_{12}^1 = p_{12}^2$; les relations (2.1.2c) puis (2.1.2b) entraînent

$$n_1 = n_2 = 2p$$

D'où

$$v = 4p + 1$$

Et le théorème 2.1.3 est démontré.

Nous en dégagerons le

COROLLAIRE 2.1.3. - *Dans un schéma d'association à 2 classes on a:*
$r_i = \frac{v-1}{2} + \frac{(-1)^i}{2\sqrt{D}}\left[n_1 - n_2 + (p_{12}^2 - p_{12}^1)(v-1)\right]$

2.2. Les (k , r , t) - Schémas.

DEFINITION 4. - On appelle (k , r , t)-schéma un schéma d'association à 2 classes tel qu'il existe des entiers strictement positifs k , r , t tels que :

$$P_1 = \begin{pmatrix} k + (r-1)(t-1) - 2 & (k-t)(r-1) \\ (k-t)(r-1) & \frac{k}{t}(k-1)(r-1) - (2k-t-1)(r-1) \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} rt & r(k-t-1) \\ r(k-t-1) & \frac{k}{t}(k-1)(r-1) - (k-1)(2r-1) + rt - 1 \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que dans un (k , r , t)-schéma on a

$$n_1 = (k-1)r$$

$$n_2 = \left(\frac{k}{t} - 1\right)(k-1)(r-1)$$

$$v = k + \frac{k}{t}(k-1)(r-1)$$

A tout ensemble (k , r , t) d'entiers rendant entiers les paramètres ci-dessus $\left(\text{c'est-à-dire tels que } \frac{k}{t}(k-1)(r-1) \text{ soit entier}\right)$ ne correspond pas un schéma. Il est en particulier nécessaire que les expressions de r_1 et r_2 données par le corollaire 2.1.3 soient entières. Et le calcul donne

$$\sqrt{D} = k + r - t - 1$$

car $D^2 = (k + r - t - 1)^2$, $r \geqslant 0$ et $k - t - 1 \geqslant 0$ (conséquence de $p_{12}^2 > 0$) ; d'où

$$r_1 = \frac{kr(1-1)(r-1)}{t(k+r-t-1)}$$

$$r_2 = \frac{kr(k-1)(k-t)}{t(k+r-t-1)} - \frac{(k-1)(k-t)}{t}$$

THEOREME 2. 2. 1. - *Dans un* (k , r , t)-*schéma on a*

$$k \geqslant t + 1 \qquad r \geqslant 2 \qquad t \geqslant 1$$

En effet $k \geqslant t + 1$ est conséquence de $p_{12}^2 \geqslant 0$ (comme remarqué ci-dessus) ou, plus simplement, de $n_2 > 0$ qui entraîne $k > t$ et en outre $r > 1$ (d'où $r \geqslant 2$). Par ailleurs, $t \geqslant 1$ est une condition contenue dans le définition.

THEOREME 2. 2. 2. - *Il y a identité entre les* (t + 1 , r , t) - *schémas et les* GD *à 2 classes.*

En effet dans un (t + 1 , r , t)-schéma on a $p_{12}^2 = 0$, donc (théorème 1. 2. 1) $S_0 \cup S_2$ est une équivalence. Il en est naturellement de même pour S_0 et $S_0 \cup S_1 \cup S_2$, et le schéma est un GD à 2 classes (cf. application du paragraphe 1. 2).

Inversement, si un (k , r , t)-schéma est un GD à 2 classes, on a nécessairement $k = t + 1$ car le théorème 2. 2. 1 implique que p_{12}^2 est toujours différent de 0 et que p_{12}^2 ne peut s'annuler que quand $k - t - 1 = 0$.

Remarquons que les entiers v_1 et v_2 de l'étude générale (paragraphe 1. 2) sont ici r et (t + 1) .

Une très importante classe de (k , r , t)-schéma est constituée par les schémas associés à certaines (k , r , t)-géométries.

DEFINITION 5. - Une (k , r , t)-géométrie est constituée de deux ensembles -un ensemble de "points" et un ensemble de "lignes"- entre lesquels est définie une relation d'incidence vérifiant

(G1) Deux points distincts sont incidents à une ligne au plus.

(G2) Toute ligne est incidente à k points.

(G3) Tout point est incident à r lignes.

(G4) Si le point a n'est pas incident à la ligne L , il existe exactement t lignes L_i et t points a_i $(t \geqslant 1)$ vérifiant : a est incident à L_i, a_i est incident à L , a_i est incident à L_i .

THEOREME 2. 2. 3. - *Dans une* (k , r , t)-*géométrie on a les propriétés :*
(G'1) *Deux lignes distinctes sont incidentes à un point au plus.*

$$1 \leqslant t \leqslant \inf(k, r)$$

Si (G'1) n'était pas vrai, il existerait au moins deux lignes distinctes indicentes à au moins deux points distincts, ce qui contredirait (G1).

Par ailleurs, bien évidemment, $t \leqslant k$ et $t \leqslant r$. Et on suppose dans la définition $1 \leqslant t$.

THEOREME 2. 2. 4. - *A une* (k , r , t)-*géométrie se trouve canoniquement associée une* (r , k , t)-*géométrie (dite géométrie duale) obtenue en échangeant les rôles de l'ensemble des points et de l'ensemble des lignes.*

En effet, les propositions (G'1), (G3), (G2) et (G4) constituent (dans l'ordre de la Définition 5) les axiomes de cette (r , k , t)-géométrie.

Désormais -le caractère dual des (k , r , t)-géométries ayant été dégagé- nous identifierons toute ligne d'une telle (k , r , t)-géométrie avec l'ensemble des points qui y sont incidents. L'ensemble des lignes devient alors une famille de parties de l'ensemble des points, et la relation d'incidence devient la relation d'appartenance. (G4) par exemple se formule alors

- par tout point n'appartenant pas à la ligne L il passe exactement t lignes coupant L .

THEOREME 2. 2. 5. - *Si une* (k , r , t)-*géométrie est telle que* $k > t+1$ *et* $r \geqslant 2$, *alors les relations* S_0 = *égalité*, S_1 *et* S_2 *déterminent un* (k , r , t)-*schéma, avec*

$x\ S_1\ y$ *Si* x *et* y *sont deux points distincts appartenant à une même ligne.*

$x\ S_2\ y$ *s'il n'existe aucune ligne passant par* x *et* y .

DEMONSTRATION. - Montrons que S_0 , S_1 , S_2 déterminant un schéma en utilisant le théorème 2. 1. 1.

Les vérifications de (A1), (A2) et (A3) sont immédiates.

Montrons alors que (2. 1. 1a) est vrai avec $i = j = k = l = h = 1$:

$S_1(x)$ est l'ensemble des points distincts de x et situés sur les lignes passant par x .

Donc

Card $(S_1(x)) = r(k-1)$ en vertu de (G2) et (G3) .

Si x et y sont deux points distincts appartenant à une même ligne (il en existe si $k \geqslant 2$) il existe $(r-1)$ lignes passant pas x et ne passant pas par y . Chacune de ces lignes est coupée par des lignes passant par y en $(t-1)$ points distincts de X . En outre, sur la ligne passant par x et y , il y a $(k-2)$ points distincts de x et y .

Donc, x et y étant 1-associés, on a

$$\textbf{Card}\,(S_1(x) \cap S_1(y)) = (r-1)(t-1) + k - 2$$

Si x et y sont deux points tels qu'il n'existe aucune ligne les contenant (il en existe si **Card** $(S_2(x)) = \emptyset$) chaque ligne passant par x (il y en a r) est coupée en t points distincts de x par des lignes passant par y .

Donc, x et y étant 2-associés, on a

$$\textbf{Card}\,(S_1(x) \cap S_1(y)) = r\,t$$

S_0 , S_1 , S_2 déterminent donc un schéma si $k \geqslant 2$ et **Card** $(S_2(x)) \geqslant 0$. Les relations (2. 1. 2a) , (2. 1. 2b) et (2. 1. 2c) permettent de calculer les différents paramètres du schéma. On constate alors que c'est un (k , r , t)-schéma. La condition **Card** $(S_2(x)) > 0$ est équivalente à $n_2 > 0$, c'est-à-dire (comme au théorème 2. 2. 1) $k \geqslant t + 1$ (ce qui entraîne $k \geqslant 2$) et $r \geqslant 2$.

Le théorème 2. 2. 5 est démontré.

Le problème réciproque admet la réponse suivante

THEOREME 2. 2. 6. - *Pour qu'un* (k , r , t)*-schéma soit le schéma associé à une* (k , r , t)*-géométrie, il suffit que :*

$$2k > r(r-1) + t(r^3 - r^2 + 2) .$$

La démonstration de ce théorème est longue et nécessite l'introduction de certaines définitions et études préliminaires.

DEFINITIONS. - Par commodité de langage, nous dirons que deux éléments 1-associés sont *liés* et deux éléments 2-associés sont *non-liés*.

On appelera *clique* une partie de E dont deux éléments distincts sont liés.

Dans un (k , r , t)-schéma une clique K sera dite *majeure* si

$$\textbf{Card}\ (K) \geqslant k - (r-1)^2\,(t-1)$$

Une partie A de E sera dite *a-griffe* si tout élément de A est lié à a et si deux points quelconques de A sont non-liés.

L'*ordre* d'une griffe sera son cardinal.

Propriétés : (vraies dans tout schéma à 2 classes) :

(2. 2. 6. 1) Toute partie d'une clique est une clique. C'est trivial.

(2. 2. 6. 2) Toute clique est contenue dans au moins une clique maximale.

Dans un ensemble fini on construit de proche en proche une telle clique maximale contenant une clique donnée. Si E est un ensemble quelconque, il suffit de remarquer que l'ensemble des cliques de E est inductif pour la relation d'inclusion (ce qui est immédiat) et d'appliquer le théorème de Zorn.

(2. 2. 6. 3) A étant une a-griffe d'ordre S , si on désigne le nombre de point de $S_1(a) - A$ liés à exactement h points de A par $\varphi_s(h)$, on a

$$\sum_{h=0}^{S} \varphi_s(h) = n_1 - S$$

$$\sum_{h=0}^{S} h\ \varphi_s(h) = S\ p_{11}^1$$

$$\sum_{h=0}^{S} h(h-1)\ \varphi_s(h) < S(S-1)\,(p_{11}^2 - 1)$$

La première formule résulte de deux évaluations distinctes de

$$\textbf{Card}\ (S_1(a) - A)$$

La deuxième formule s'obtient en dénombrant les couples (x , y) tels que x soit un point de A et y un point de $S_1(a) - A$ tel que x et y soient liés. x étant donné dans A , il existe

p_{11}^1 points y liés à x et à a ; or, tous ces points appartiennent à $S_1(a) - A$ puisque A est une griffe.

Le nombre de couples cherché est donc d'une part $S\, p_{11}^1$. Il est d'autre part $\sum_{h=0}^{S} h\, \varphi_s(h)$ puisque, pour tout h, il existe $h\, \varphi_s(h)$ couples (x, y) tels que y doit lié à exactement h points de A.

La troisième formule enfin provient de l'examen des triplets (x, y, z) tels que x et y soient deux points distincts de A, z un point de $S(a) - A$ tel que x et z d'une part, y et z d'autre part soient liés. x et y étant deux points distincts de A sont non liés puisque A est une griffe. Il y a donc, dans E, p_{11}^2 points z liés à x et y. Parmi ces points figure a. Comme d'autre part le nombre de couples ordonnés (x, y) est $S(S-1)$, le nombre de triplets (x, y, z) (où $z \in S_1(a) - A$ est inférieur ou égal à : $S(S-1)(p_{11}^2 - 1)$. Par ailleurs le nombre de ces triplets est $\sum_{h=0}^{S} h(h-1)\, \varphi_s(h)$ puisque, z_o étant un point de $S_1(a) - A$, il existe $h_o(h_o - 1)$ triplets (x, y, z_o) si z_o est lié à exactement h_o points de A.

Nous sommes maintenant en mesure d'entreprendre la démonstration du théorème 2.2.6. Pour cela énonçons les propositions :

(a) $2k > r(r-1) + t(r^3 - r^2 + 2)$.

(b) $k > rt + (r-1)(2r-1)(t-1)$.

(c) $k > 1 + (r-1)(2r-1)(t-1)$.

(d) $k > 1 + (r-1)^2 (t-1)$.

(e) *Il n'existe aucune griffe d'ordre* $(r+1)$.

(f) *Si* K *est une clique de* k *points, tout point extérieur à* K *est lié à exactement* t *points de* K.

(g1) *Deux points liés appartiennent à une clique majeure maximale et à une seule.*

(g2) *Toute clique majeure maximale contient* k *points.*

(g3) *Tout point appartient à* r *cliques majeures maximales.*

(g4) *Si* K *est une clique majeure maximale, tout point extérieur à* K *est lié exactement à* t *points de* K.

LEMME 1. - (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (d).

Nous savons (théorème 2.2.1) que dans un (k, r, t)-schéma

$$r \geqslant 2 \qquad t \geqslant 1 .$$

Montrons alors

$$r(r-1) + t(r^3 - r^2 + 2) \geqslant 2\,[rt + (r-1)(2r-1)(t-1)]$$

inégalité équivalente à

$$-tr\,(r-4) \leqslant 5r - 1$$

qui est trivialement vérifiée pour $r \geqslant 4$. Il en est de même dans le cas particulier $r = 3$, $r = 2$ ainsi que le montre deux examens directs. Il en résulte l'implication : (a) $\Longrightarrow$ (b) .

(b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (d) provient des inégalités triviales

$$rt + (r-1)(2r-1)(t-1) > 1 + (r-1)(2r-1)(t-1) \geqslant 1 + (r-1)^2(t-1)$$

LEMME 2. - (a) $\Longrightarrow$ (e) .

En effet dans (2. 2. 6. 3) multiplions les deux termes de la première formule par 2 , ceux de la deuxième par (−2), ceux de la troisième par 1 et additionnons. Il vient

$$2\,\varphi_s(0) + \sum_{h=3}^{s} (h-1)(h-2)\,\varphi_s(h) \leqslant 2(n_1 - S) - 2S\,p_{11}^1 + S(S-1)(p_{11}^2 - 1)$$

Ce qui donne, dans un (k , r , t)-schéma

$$2\varphi_s(0) + \sum_{h=3}^{s} (h-1)(h-2)\,\varphi_s(h) < 2k(r-S) + (2r-S)(S-1) + tS(Sr - 3r + 2)$$

Quel que soit S , le premier membre de cette inégalité est positif ou nul. Or, supposons qu'on ait $S = r + 1$; le second membre de l'inégalité devient

$$-2k + r(r-1) + t(r^3 - r^2 + 2)$$

Ce second membre est strictement négatif quand (a) est vérifié. Il n'existe donc pas, alors, de griffe d'ordre $(r+1)$.

LEMME 3. - (b) et (e) $\Longrightarrow$ (g1) .

Montrons d'abord que tout a-griffe d'ordre S peut-être prolongée en une a-griffe d'ordre $(S+1)$ quand $S < r$ et (d) est vérifiée. C'est-à-dire qu'alors $\varphi_s(0)$ est strictement positif. Evaluons $\varphi_s(0)$ en faisant la différence des deux premières formules de (2. 2. 2. 3) ; il vient

(3. a) $$\varphi_s(0) = \sum_{h=2}^{s} (h-1)\varphi_s(h) + n_1 - S - S\, p_{11}^1$$

$\varphi_s(0)$ est strictement positif quand $n_1 - S - S\, p_{11}^1 > 0$. C'est-à-dire

$$(r-S)(k-1) - S(t-1)(r-1) > 0$$

Cette condition est vérifiée quand (d) est vraie et $S < r$.

Si a et b sont deux points liés, $\{b\}$ est une a-griffe d'ordre 1 . En appliquant le résultat ci-dessus à tout $1 \leqslant S < r$, on montre qu'il existe une a-griffe A d'ordre r contenant b , sous la réserve que (d) soit vérifiée.

Posons $A' = \{x \mid (A - \{b\}) \cup \{x\}$ est une a-griffe $\}$.

On a : $b \in A'$. En outre, (e) étant supposée vérifiée, deux points distincts de A' sont liés. De plus tout point de A' est lié à a . Donc $A' \cup \{a\}$ est une clique.

Montrons maintenant que la clique $A' \cup \{a\}$ est majeure, c'est-à-dire que : **Card** $(A') \geqslant k - 1 - (r-1)^2 (t-1)$.

Or (3. a) donne justement

$$\varphi_{r-1}(0) \geqslant k - 1 - (r-1)^2 (t-1)$$

Il existe donc une clique majeure contenant deux points liés quelconques. Ce résultat joint à (2. 2. 6. 2) donne

- Deux points liés quelconques appartiennent à une clique majeure maximale au moins.

Montrons enfin que cette clique est unique quand (b) est vérifiée. Supposons pour cela que K et K' soient deux cliques majeures maximales distinctes contenant deux points distincts a et b . $K \cup K'$ n'est pas une clique car K et K' sont maximales. Il existe donc $c \in K$ et $c' \in K'$ tels que c et c' soient non liés. Tout point de $K \cap K'$ est lié à c et c' . Donc **Card** $(K \cap K') \leqslant p_{11}^2$. a et b appartiennent à K et K' qui sont constitués de points liés à a et à b . Donc **Card** $(K \cup K') \leqslant p_{11}^1 + 2$. Il en résulte

$$\textbf{Card}\ (K) + \textbf{Card}\ (K') = \textbf{Card}\ (K \cup K') + \textbf{Card}\ (K \cap K') \leqslant p_{11}^1 + p_{11}^2 + 2$$

$$\leqslant k + (r-1)(t-1) + rt$$

Faisons maintenant intervenir l'hypothèse que K et K' sont majeures.

Il vient

$$2\,[k - (r-1)^2\,(t-1)\,] \leqslant \textbf{Card}\,(K) + \textbf{Card}\,(K') \leqslant k + (r-1)\,(t-1) + rt$$

Ce qui entraîne

$$k < rt + (r-1)(2r-1)\,t - 1)$$

propriété contredisant (b) . D'où l'unicité.

Et le Lemme 3 est démontré puisque (b) $\Longrightarrow$ (d) (Lemme 1).

LEMME 4. - (c) , (e) et (g1) $\Longrightarrow$ (g3) .

Soit a un point quelconque de E et $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ une a-griffe d'ordre r (il en existe en vertu du début du lemme 3 et du fait que a est lié à au moins un point). (g1) étant supposée vérifiée, soit K_i la clique majeure maximale contenant a et a_i . Les K_i sont deux à deux distinctes car deux points de A sont non liés. a appartient donc à au moins r cliques majeures maximales distinctes. Il reste à montrer qu'il n'y en a pas d'autre.

Pour cela posons

$$A_i^* = \{x \in S_1(a) - A \mid x \text{ lié à } a_i,\ x \text{ non lié à } a_j \text{ si } i \neq j\}$$

$$A_i = A_i^* \cup \{a\} \cup \{a_i\}$$

Il résulte de (e) que deux points de A_i sont liés. A_i est donc une clique contenant a et a_i .

On a

$$\textbf{Card}\,(K_i) \geqslant \textbf{Card}\,(A_i)$$

En effet, dans le cas contraire ($\textbf{Card}\,(A_i) > \textbf{Card}\,(K_i)$) , A_i serait contenue dans une clique maximale (2. 2. 6. 2) qui serait majeure et distincte de K_i . Il y aurait alors deux cliques majeures distinctes contenant a et a_i , contrairement à (g1).

Il s'ensuit

$$\sum_{i=1}^{r} \textbf{Card}\,(K_i - \{a\}) \geqslant \sum_{i=1}^{r} \textbf{Card}\,(A_i - \{a\})$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{r} \textbf{Card}\,(A_i - \{a\}) = r + \sum_{i=1}^{r} \textbf{Card}\,(A_i^*)$$

et :

$$\sum_{i=1}^{r} \textbf{Card}\,(A_i^*) = \varphi_r(1)$$

Examinons $\varphi_r(1)$ à partir de (2. 2. 6. 3) et en tenant compte du fait que $\varphi_r(0) = 0$ en vertu de (e) .

On obtient

$$\sum_{h=2}^{r} (h-1)\ \varphi_r(h) = r(r-1)(t-1)$$

En retranchant membre à membre les deux premières formules de (2. 2. 6. 3), on a d'autre part

$$\sum_{h=2}^{r} \varphi_r(h) \leqslant \sum_{h=2}^{r} (h-1)\ \varphi_r(h)$$

Soit

$$r(k-2) - \varphi_r(1) \leqslant r(r-1)(t-1)$$

D'où

$$r[k-1-(r-1)(t-1)] \leqslant \varphi_r(1)$$

Supposons maintenant qu'il existe une autre clique majeure maximale K_{r+1} contenant a . Les ensembles $K_1 - \{a\}$,..., $K_r - \{a\}$, $K_{r+1} - \{a\}$ sont deux à deux disjoints en vertu de (g1). Ils sont d'autre part contenus dans $S_1(a)$.

Donc

$$\sum_{i=1}^{r+1} \textbf{Card}(K_i - \{a\}) \leqslant n_1$$

Soit

$$\sum_{i=1}^{r} \textbf{Card}(K_i - \{a\}) + k - 1 - (r-1)^2 (t-1) < r(k-1)$$

C'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{r} \textbf{Card}(K_i - \{a\}) < (r-1)[k-1+(r-1)(t-1)]$$

Or

$$r[k-1-(r-1)(t-1)] < \sum_{i=1}^{r} \textbf{Card}(K_i - \{a\})$$

K_{r+1} n'existera donc pas si

$$r[k-1-(r-1)(t-1)] > (r-1)\ [k-1+(r-1)(t-1)]$$

c'est-à-dire si (c) est vérifiée.

Ce qui achève la démonstration du Lemme 4.

LEMME 5. - *La proposition* (f) *est vraie.*

Posons : $\psi(h)$ = nombre de points extérieurs à K liés à exactement h points de K .

On a les relations

$$\sum_{h=0}^{k} \psi(h) = \textbf{Card}\,(E - K) = v - k$$

$$\sum_{h=0}^{k} h\psi(h) = k(n_1 - k + 1)$$

car c'est le nombre des couples (x , y) où x appartient à K , y appartient à E − K , x et y étant liés.

$$\sum_{h=0}^{k} h\,(h-1)\,\psi(h) = k\,(k-1)\,(p_{11}^1 - k + 2)$$

car c'est le nombre des triplets (x , y , z) de points liés deux à deux avec, en outre, x et y éléments de K , z élément de E − K .

On en déduit

$$\sum_{h=0}^{k} (h-t)^2\psi(h) = \sum_{h=0}^{k} h(h-1)\,\psi(h) + (1-2t)\sum_{h=0}^{k} h\,\psi(h) + t^2 \sum_{h=0}^{k} \psi(h)$$

Donnant à v , n_1 , p_{11}^1 leurs valeurs il vient :

$$\sum_{h=0}^{k} (h-t)^2\,\psi(h) = 0$$

Donc, pour tout $h \neq t$, $\psi(h) = 0$.

Comme d'autre part il exsite par hypothèse des points extérieurs à K , il existe au moins une valeur de h n'annulant pas ψ . Cette valeur est donc unique et égale à t pour tout point extérieur à K . Ce qui achève la démonstration du Lemme 5.

LEMME 6. - (f) , (g1) et (g3) $\Longrightarrow$ (g2) .

Soient K_1 , K_2 , ... , K_r les r cliques majeures maximales distinctes passant par a (proposition (g3)). Il résulte de (g1) que les $K_i - \{a\}$ sont deux à deux disjoints et que tout point lié à a

dans E appartient à une clique majeure maximale contenant a , c'est-à-dire à un : $K_i - \{a\}$.

On a donc

$$S_1(a) = \bigcup_{i=1}^{r} (K_i - \{a\})$$

Ce qui entraîne

(6. a) $$n_1 = r(k-1) = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{Card}(K_i - \{a\})$$

Il existe donc au moins un ensemble $K_i - \{a\}$ contenant au moins $(k-1)$ points. Ainsi K_1 , par exemple, a au moins k points.

Soit $K'_1 \subset K_1$ tel que $\mathbf{Card}(K'_1) = k$.

Si $K'_1 - K_1$ est non vide, il existe b appartenant à $K_1 - K'_1$, c'est-à-dire extérieur à la clique K'_1 . Donc b est lié, en vertu de (f) , à exactement t points de K'_1 . Or $k > t$ (théorème 2. 2. 1) ce qui contredit le fait que K_1 est une clique. Il s'ensuit que $K_1 - K'_1$ est nécessairement vide.

Donc aucune clique K_1 , K_2 , . . . , K_r ne contient plus de k points. Il résulte alors de (6. a) que toute clique K_1 , K_2 , . . . , K_r contient exactement k points. Le Lemme 6 est démontré.

LEMME 7. - (f) et (g2) $\Longrightarrow$ (g4) .

C'est immédiat.

Il suffit maintenant de récapituler pour achever la démonstration du théorème 2.2.6. Il résulte en effet des différents lemmes

(a) $\Longrightarrow$ (g1), (g2), (g3) et (g4)

2.3. Les schémas cycliques.

Dans ce paragraphe E sera identifié à $\mathbf{Z}/(v)$.

DEFINITION 6. - *Un schéma d'association est dit cyclique si on a, pour tout* $i \in I$ *et tout* $x \in E$

$$S_i(x) = x + S_i(0)$$

Remarquons qu'un schéma cyclique à 2 classes est complètement déterminé par la donnée d'un des deux sous-ensembles $S_i(0)$ de $E^* = E - \{0\}$. Mais cette donnée ne peut être arbitraire.

Plus précisément on a

THEOREME 2.3.1. - *Pour qu'une partie non vide* E_1, *strictement contenue dans* E, *puisse être le sous-ensemble* $S_1(0)$ *d'une schéma cyclique à 2 classes. il faut et il suffit que soient réalisés les deux conditions*

(2.3.1.1) $E_1 = -E_1$.

(2.3.1.2) *L'application de* E_1^2 *dans* E *définie par* $(x,y) \rightsquigarrow x-y$ *atteint tout élément de* E_1 *(resp.* $E^* - E_1$*) le même nombre de fois.*

DEMONSTRATION. - Nous utiliserons le théorème 2.1.1 avec $i = j = k = l = h = 1$.

(A1) est vérifié du fait que $E - E^* = \{0\} = S_0(0)$, d'où $S_0(x) = \{x\}$.

(A2) équivaut à "$x \in S_1(0)$ entraîne $0 \in S_1(x)$" qui s'écrit, en vertu de la définition 6, "$x \in S_1(0)$ entraîne $-x \in S_1(0)$". C'est-à-dire : $E_1 \subset -E_1$ (qui entraîne $-E_1 \subset E_1$) d'où la condition (2.3.1.1).

(A3) est trivialement vérifié une fois remarqué que $S_1(0)$ (resp. $S_2(0)$) n'est pas vide car on suppose E_1 non vide (resp. strictement contenu dans E^*). **Card** $(S_i(x))$ ne dépend que de i. En effet : **Card** $(S_i(x))$ = **Card** $(S_i(0))$ en vertu de la définition 6.

Remarquons que pour la vérification des deux dernières conditions de (2.1.1a) il suffit de supposer $x = 0$. En effet "x et y i-associés" équivaut à "0 et y-x i-associés".

Soit donc x 1-associé à 0. Cherchons combien il y a d'éléments y 1-associés à 0 et à x, c'est-à-dire tels qu'on ait

$y \in E_1$, $y - x \in E_1$ avec l'hypothèse $x \in E_1$. Posons $z = y - x$. Il y a autant de y qu'il y a de couples (y , z) vérifiant

$$y \in E_1 \ , \ z \in E_2 \ , \ y - z = x$$

Le nombre de ces couples est égal à **Card** $(S_1(0) \cap S_1(x))$.

Pour que ce nombre soit indépendant de x , il faut et il suffit que tout élément de E_1 soit atteint le même nombre de fois dans l'application $(x , y) \rightsquigarrow x - y$ de E_1^2 dans E .

La dernière condition de (2.1.1a) s'obtient de la même manière. La seule différence consiste alors à prendre x 2-associé à 0 , c'est-à-dire $x \in E^* - E_1$.

Le théorème 2.3.1 est démontré.

THEOREME 2.3.2. - *Si, dans un schéma cyclique à 2 classes, il existe* $S_1(0)$ *tel que l'application* $(x , y) \rightsquigarrow x - y$ *de* $(S_1(0))^2$ *dans* E *ne touche aucun élément de* $E^* - S_1(0)$, *alors le schéma est un* GD *à 2 classes.*

Inversement : tout GD *à 2 classes peut être décrit comme schéma cyclique.*

DEMONSTRATION. - Posons $H_1 = S_1(0) \cup \{0\}$. La condition formulée dans la première partie du théorème donne alors

$$x \in H_1 \ , \ y \in H_1 \Longrightarrow x - y \in H_1 \ ,$$

puisque nous avons introduit le 0 . H_1 est donc un sous-groupe additif de E . Il s'ensuit que la relation $S_0 \cup S_1$ est une équivalence. Le schéma est donc un GD à 2 classes.

Inversement : soit un GD à 2 classes, $S_0 \cup S_1$ étant une équivalence. Reprenant les notations du paragraphe (1.2) nous avons $v = v_1 v_2$.

Il existe v_2 éléments $x_1 , x_2 , \ldots , x_{v_2}$ tels que les sous-ensembles $(S_0 \cup S_1)(x_i)$ forment une partition de E . Soit $f : E \longrightarrow \mathbf{Z}/(v)$ une application telle que

$$f(x_i) = i - 1$$

$$f(S_1(x_1)) = \{v_2 , 2v_2 , 3v_2 , \ldots , (v_1 - 1) v_2\}$$

$$f(S_1(x_i)) = (i - 1) + f(S_1(x_1))$$

Il est immédiat de vérifier qu'une telle application est bijective et permet de représenter le GD initial comme schéma cyclique.

Chapitre 3

Constructions et exemples de schémas

3.1. Méthodes générales de construction.

THEOREME 3.1.1. - E *étant un groupe multiplicatif fini, à toute partie* $X \subset E$ *associons son image canonique* $\bar{E}$ *dans l'algèbre du groupe* $\mathbf{Z}^{(E)}$ *relative à l'anneau* $\mathbf{Z}$ ([7,]).

Supposons qu'il existe une partition de E *en* m *parties* X_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ *telles que*

(3.1.1.1) $X_o = \{e\}$ (e = *élément neutre de* E).

(3.1.1.2) $X_i = X_i^{-1}$

(3.1.1.3) $\overline{X}_i \overline{X}_j = \sum_{k=0}^{m} p_{ij}^k \overline{X}_k$

alors les $(m+1)$ *relations* S_i *définies par* $x S_i y \Longleftrightarrow x y^{-1} \in X_i$ *déterminent un schéma d'association à* m *classes associées sur* E.

DEMONSTRATION. -

(A1) (resp. (A2)) est vérifié du fait de (3.1.1.1) (resp.(3.1.1.2)).

(A3) provient de ce que les parties X_i forment une partition de E.

Evaluons alors **Card** $(S_j(x) \cap S_k(y))$, x et y étant supposés i-associés, c'est-à-dire x et y étant tels que $x y^{-1} \in X_i$. On cherche combien il y a d'éléments z tels que $x z^{-1} \in X_j$ et $y z^{-1} \in X_k$ (condition équivalente à $z y^{-1} \in X_k$ du fait de (A2)). Posons $x z^{-1} = u$ et $z y^{-1} = v$. On a alors : $uv = x y^{-1}$. Inversement, soient $u \in X_j$ et $v \in X_k$ tels que $uv = x y^{-1}$: tout élément $z = u^{-1} x \ (= yv)$ est alors élément de $S_j(x) \cap S_k(y)$. Il y a donc autant d'éléments z qu'il existe de couples (u, v) tels que $u \in X_j$, $v \in X_k$, $uv \in X_i$. D'après (3.1.1.3) ce nombre ne dépend que de i, j, k et vaut p_{jk}^i. (A4) est alors conséquence de (3.1.1.3).

Le théorème 3. 1. 1 est démontré.

REMARQUE 1. - On a, pour tout $0 \leqslant i \leqslant m$: $n_i = \mathbf{Card}\,(X_i)$.

REMARQUE 2. - Le théorème 2. 3. 1 peut alors être considéré comme une conséquence des théorèmes 3. 1. 1 et 2. 1. 1 dans le cas ou E est un groupe additif (avec $X_1 = E_1$ et $X_2 = E^* - E_1$) .

EXEMPLE 1. - Supposons que E est produit direct des sous groupes H_1 et H_2 . Posons $X_0 = \{e\}$, $X_1 = H_1 - \{e\}$, $X_2 = H_2 - \{e\}$, $X_3 = X_1 X_2$ $\mathbf{Card}(H_i) = h_i$ (ou $h_i \geqslant 2$).

Les parties X_0 , X_1 , X_2 , X_3 forment une partition de E et $X_i = X_i^{-1}$.

On vérifie alors les relations (en posant $\{i , i^*\} = \{1 , 2\}$) .

$$(\overline{X}_1)^2 = (h_1 - 1)\,\overline{X}_0 + (h_1 - 2)\,\overline{X}_1$$

$$\overline{X}_1\,\overline{X}_3 = (h_1 - 1)\,\overline{X}_{1^*} + (h_1 - 2)\,\overline{X}_3$$

$$\overline{X}_1\,\overline{X}_2 = \overline{X}_3$$

$$(\overline{X}_3)^2 = (h_1-1)(h_2-1)\,\overline{X}_0 + (h_2-1)(h_1-2)\overline{X}_1 + (h_1-1)(h_2-2)\overline{X}_2 + + (h_1 - 2)(h_2 - 2)\,\overline{X}_3$$

A la partition de E en X_0 , X_1 , X_2 , X_3 se trouve donc associé un schéma d'association à 3 classes pour lequel on a

$$n_1 = h_1 - 1 \qquad n_2 = h_2 - 2 \qquad n_3 = (h_1 - 1)(h_2 - 1)$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} n_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_2(n_1 - 1) \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n_1 \\ 0 & n_2 - 1 & 0 \\ n_1 & 0 & n_1(n_2 - 1) \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n_1 - 1 \\ 1 & 0 & n_2 - 1 \\ n_1 - 1 & n_2 - 1 & (n_1 - 1)(n_2 - 1) \end{pmatrix}$$

REMARQUE. - Une telle méthode de construction s'applique pour tout groupe E produit direct d'un nombre quelconque de sous groupes. Ainsi, dans le cas où E est produit direct de H_1 , H_2 , H_3 on peut prendre

$$X_0 = \{e\} \ , \ X_1 = H_1 - \{e\} \ , \ X_2 = H_2 - \{e\} \ , \ X_3 = H_3 - \{e\}$$

$$X_4 = X_2 X_3 \ , \ X_5 = X_3 X_1 \ , \ X_6 = X_1 X_2 \ , \ X_7 = X_1 X_2 X_3$$

EXEMPLE 2. - Supposons que E est produit direct de m sous groupes H_i $(i = 1 , 2 , \ldots , m)$.

Posons $X_0 = e$ $X_i = H_1 H_2 \ldots H_{i-1}(H_i - \{e\})$ pour $i = 1 , \ldots , m$.

$$(H_i) = h_i \qquad (\text{où} \quad h_i \geqslant 2)$$

Les parties $X_0 , X_1 , X_2 , \ldots , X_m$ constituent une partition de E et $X_i = X_i^{-1}$.

On vérifie alors les relations

$$(\overline{X}_i)^2 = h_1 h_2 \ldots h_{i-1} (h_i - 1) (\overline{X}_0 + \overline{X}_1 + \ldots + \overline{X}_{i-1}) + h_1 h_2 \ldots h_{i-1} (h_i - 2) \overline{X}_i$$

$$\overline{X}_i \overline{X}_j = h_1 h_2 \ldots h_{i-1} (h_i - 1) \overline{X}_i + h_1 h_2 \ldots h_{j-1} (h_j - 1) \overline{X}_j$$

Donc, à la partition de E en $X_0 , X_1 , X_2 , \ldots , X_m$, se trouve associé un schéma d'association à m classes pour lequel on a

$$n_i = h_1 h_2 \ldots h_{i-1} (h_i - 1) \qquad \text{pour} \quad i = 1 , 2 , \ldots , m$$

Ce schéma est un GD à m classes.

En effet : pour tout $0 \leqslant p \leqslant m$, $\bigcup_{i=0}^{p} S_i$ est une équivalence car $y \in \bigcup_{i=0} S_i(x)$ s'écrit $x y^{-1} \in H_1 H_2 \ldots H_p$ qui est un sous groupe de E.

EXEMPLE 3. - Dans cet exemple nous supposerons que la partition que nous allons construire $X_0 = \{e\} , X_1 , \ldots , X_m$ vérifie l'hypothèse (toujours vraie lorsque E est abélien)

$$(H) \qquad \overline{X}_i \overline{X}_j = \overline{X}_j \overline{X}_i \qquad \text{pour} \quad i , j = 1 , \ldots , m$$

(condition trivialement vérifiée quand un des deux indices est nul).

Soit G un groupe d'automorphismes de E. Désignons par $G(x)$ l'orbite de $x \in E$ (c'est-à-dire $G(x) = \{g(x) \mid g \in G\}$). On sait que les parties $G(x)$ sont deux à deux disjointes ou confondues puisque classes d'équivalence. Remarquons par ailleurs que

$$G(x) = G(y^{-1}) \Longleftrightarrow G(x^{-1}) = G(y)$$

(en effet g et h étant des homomorphismes de E, on a

$$g(x) = h(y^{-1}) \Longleftrightarrow (g(x^{-1}) = h(y))$$

Les ensembles $G(x) \cup G(x^{-1})$ sont deux à deux disjoints ou confondus.

E étant fini, il existe donc un nombre fini d'éléments : $a_0 = e$, $a_1, \ldots, a_m$ tels que les $G(a_i) \cup G(a_i^{-1})$ forment une partition de E.

Posons

$$X_i = G(a_i) \cup G(a_i^{-1})$$

(3.1.1.1) est vérifié car $G(a_m) = G(a_o^{-1}) = \{e\}$.

(3.1.1.2) provient de ce que $(g(a_i))^{-1} = g(a_i^{-1})$ du fait que g est un homomorphisme, d'où

$$(G(a_i) \cup G(a_i^{-1}))^{-1} = G(a_i^{-1}) \cup G(a_i)$$

Il reste à examiner (3.1.1.3). Remarquons d'abord que la relation "x et y appartiennent à la même partie X_i" équivaut à

"il existe $g \in G$ tel que $\begin{cases} \text{soit} & y = g(x) \\ \text{soit} & y = g(x^{-1}) \end{cases}$".

Soit donc $u \in X_i$, $v \in X_j$ avec $uv = w \in X_k$ et $w' \in X_k$.

- Dans le premier cas on a : $w' = g(w)$ donc $g(u)\,g(v) = g(uv) = w'$ avec $g(u) \in X_i$ et $g(v) \in X_j$ du fait de la remarque ci-dessus.

Inversement, si $u'v' = w'$ avec $u' \in X_i$, $v' \in X_j$ alors

$g^{-1}(u')\,g^{-1}(v') = g^{-1}(w') = w$ où $g^{-1}(u') \in X_i$ et $g^{-1}(v') \in X_j$;

(g^{-1} existe en effet, et est un homomorphisme). Il y a donc alors autant de couples (u, v) vérifiant $uv = w$, $u \in X_i$, $v \in X_j$ que de couples (u', v') vérifiant $u'v' = w'$, $u' \in X_i$, $v' \in X_j$, g étant bijective.

- Dans le second cas on a $w' = g(w^{-1})$ ce qui donne $w' = g(v^{-1})\,g(u^{-1})$ où $g(v^{-1}) \in X_j$ et $g(u^{-1}) \in X_i$. Et on ne peut aboutir à la conclusion qu'en faisant intervenir l'hypothèse (H) qui dit d'une part que $uv = u'v'$, et d'autre part que le nombre de couples

(u , v) vérifiant une telle égalité est égal au nombre de couples (u' , v') .

(3. 1. 1. 3) est alors vérifié et la famille $(G(a_i) \cup G(a_i^{-1}))$ détermine bien un schéma.

THEOREME 3. 1. 2. - *Si les relations* $S_o , S_1 , \ldots , S_m$ *déterminent un schéma à* m *classes sur* E *(dont les paramètres seront désignés par* v , n_i , P_i *) ,* * *alors, pour tout entier* $p \geqslant 2$ *, les relations* $S_o^* , S_1^* , \ldots , S_m^* , S_{m+1}^*$ *déterminent un schéma à* $(m + 1)$ *classes sur* $E^* = E \times \{1 , 2 , \ldots , p\}$ *avec*

$$S_i^*(x , j) = \{(y , j) \in E^* \mid y \in S_i(x)\} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant m$$

(3. 1. 2. 1)

$$S_{m+1}^*(x , j) = \{(y , k) \in E^* \mid y \in E , \quad k \neq j\}$$

Les matrices d'association de ce schéma sont

$$P_i^* = \begin{pmatrix} P_i & O_{m,1} \\ O_{1,m} & (p-1)v \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

$$P_{m+1}^* = \begin{pmatrix} O_{m,m} & {}^tA_{m+1} \\ A_{m+1} & a_{m+1} \end{pmatrix}$$

où

$$A_{m+1} = (n_1 \; n_2 \; \ldots \; n_m)$$

$$a_{m+1} = (p-2)v$$

Réciproquement : Si un schéma à $(m + 1)$ *classes sur un ensemble* E^* *est tel qu'il existe* $i \in 1 , 2 , \ldots , m + 1$ *vérifiant l'une des deux conditions équivalentes*

(3. 1. 2. 2a) *pour tout* $i \neq i_o$ *et tout* $j \neq i_o$ $p^i_{i_o j} = 0$

(3. 1. 2. 2b) *pour tout* $i \neq i_o$ *et tout* $j \neq i_o$ $p^{i_o}_{ij} = 0$

alors il existe un entier $p \geqslant 2$ *, un ensemble* E^* *et un schéma à* m *classes sur* E *tel que* E^* *puisse être identifié à* $E \times \{1, 2, \ldots , p\}$ *et que les schémas de* E *et* E^* *soient liés par les relations* (3.1.2.1) *(où on suppose* $i_o = m + 1$ *) .*

DEMONSTRATION. - La vérification de (A1), (A2) et (A3) dans E^* est immédiate.

Soient x et y i-associés dans E . Alors (x , j) et (y , j) sont i-associés dans E^* et on a

$$\textbf{Card}\,(S_k^*(x\ ,\ j)\cap S_l^*(y\ ,\ j)) = \begin{cases} p_{kl}^i & \text{si } k\leqslant m \text{ et } l\leqslant m \\ 0 & \text{si } k\leqslant m \text{ et } l = m+1 \\ (p-1)v & \text{si } k = l = m+1 \end{cases}$$

Soit maintenant $j_1 \neq j_2$. On a

$$\textbf{Card}\,(S_k^*(x\ ,\ j_1)\cap S_l^*(y\ ,\ j_2)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k\leqslant m \text{ et } l\leqslant m \\ n_k & \text{si } k\leqslant m \text{ et } l = m+1 \\ (p-2)v & \text{si } k = l = m+1 \end{cases}$$

Il s'ensuit que (A4) est vérifié et que les matrices d'association du schéma de E^* ont bien la forme annoncée.

Pour la démonstration de la réciproque, supposons, par commodité d'écriture, que $i_o = m+1$. La condition (3. 1. 2. 2a) (resp. 3. 1. 2. 2b)) est alors équivalente à : P_1^* (resp. P_{m+1}^*) est de la forme décrite dans l'énoncé. Il s'ensuit (Théorème 1. 2. 2) que les conditions (3. 1. 2. 2a) et (3. 1. 2. 2b) sont équivalentes et que $\bigcup_{i=0}^{m} S_i^*$ est une équivalence. $\bigcup_{i=0}^{m+1} S_i^*$ étant aussi à une équivalence contenant la précédente, on a (théorème 1. 2. 3) $\sum_{i=0}^{m} n_i^* \,\Big|\, \sum_{i=0}^{m+1} n_i^*$ (cette division étant stricte). Il existe donc un entier $p \geqslant 2$ tel que

$$\textbf{Card}\,(E^*) = \sum_{i=0}^{m+1} n_i^* = p \sum_{i=0}^{m} n_i^*$$

E^* admet donc une partition en p sous ensembles (de même cardinal égal à $\sum_{i=0}^{m} n_i$) E_1^* , E_2^* , . . . , E_p^* .

Posons $E_1^* = E$. On a, pour tout $0 \leqslant i \leqslant m$, $S_i^*(x) \subset E$ dès que $x \in E$. Les relations S_o^* , S_1^* , . . . , S_m^* induisent donc sur E(m + 1) relations S_o , S_1 , . . . , S_m . Il est alors immédiat de vérifier que ces (m + 1) relations déterminent un schéma à m classes sur E dont les matrices d'association sont P_1 , . . . , P_m , que E^* peut être identifié à : $E \times \{1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ p\}$ et que les relations S_i^* peuvent être considérées comme obtenues à partir des relations S_i au moyen de (3. 1. 2. 1).

REMARQUE. - Soient p_1 , p_2 , . . . , p_m des entiers $\geqslant 2$ et E un ensemble ne contenant qu'un élément. Posons $E_i = E_{i-1} \times \{1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ p_i\}$.

Le procédé ci-dessus, utilisé de proche en proche, permet de construire un schéma à m classes sur E_m. Il est aisé de vérifier que ce schéma est un GD à m classes et que tout GD à m classes peut être décrit de cette façon.

THEOREME 3.1.3. - *Si les relations* S_o , S_1 ,... , S_m *déterminent un schéma à* m *classes sur* E (*dont les matrices d'association seront désignées par* P_o , P_1 ,... , P_m) *alors, pour tout entier* $p \geqslant 2$, *les relations* S_o^* = *égalité,* S_1^* ,... , S_{m+1}^* *déterminent un schéma à* (m+1) *classes sur* $E^* = E \times \{1 , 2 , \ldots , p\}$ *avec*

$$S_1^*(x , j) = \{(x , k) \in E^* \mid k \neq j\}$$

$$S_{i+1}^*(x , j) = \{(y , k) \in E^* \mid y \in S_i(x) , k \in \{1 , \ldots , p\}\} \qquad (3.1.3.1)$$

pour $1 \leqslant i \leqslant m$.

Les matrices d'association de ce schéma sont

$$P_1^* = \begin{pmatrix} p-2 & O_{1,m} \\ O_{m,1} & pP_o \end{pmatrix} \qquad P_{i+1}^* = \begin{pmatrix} O & B_i \\ tB_i & pP_i \end{pmatrix}$$

où $B_i = (O \ldots O \ p-1 \ O \ldots O)$ ($(p-1)$ *étant à la colonne d'indice* i).

RECIPROQUEMENT. - *Si on peut ordonner les classes d'association d'un schéma à* $(m+1)$ *classes sur un ensemble* E^* *de telle sorte que les matrices d'association s'écrivent comme ci-dessus, alors il existe un ensemble* E *et un schéma à* m *classes sur* E *tels que* E^* *puisse être identifié à* $E \times \{1 , 2 , \ldots , p\}$ *et que les schémas de* E *et de* E^* *soient liés par les relations* (3.1.3.1).

DEMONSTRATION. - La vérification de (A1), (A2) et (A3) dans E^* est immédiate.

Si $j_1 \neq j_2$ on a

$$\textbf{Card}\,(S_k^*(x , j_1) \cap S_1^*(x , j_2)) = \begin{cases} p-2 & \text{si } k = 1 = 1 . \\ p\,p^o_{k-1,1-1} & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Soit maintenant x et y i-associés dans E ($1 \leqslant i \leqslant m$) . (x , j_1) et (y , j_2) sont donc $(i+1)$-associés dans E^* quels que soient j_1 et j_2 .

$$\textbf{Card}\,(S_k^*(x\ ,\ j_1)\cap S_1^*\ (y\ ,\ j_2)) = p-1 \qquad \text{si}\quad k=1 \quad 1=i+1$$

$$p\ p^{i}_{k-1,1-1} \qquad \text{dans les autres cas.}$$

Il s'ensuit que (A4) est vérifié et que les matrices d'association du schéma de E^* ont bien la forme annoncée.

RECIPROQUEMENT. - Soit un schéma à $(m+1)$ classes sur un ensemble E^* dont les matrices d'association sont de la forme indiquée.

Il résulte alors du théorème 1.2.2 que $S_o^* \cup S_1^*$ est une équivalence.

Remarquons en outre que $y \in S_1^*(x)$ entraîne $S_1^*(y) = S_i^*(x)$ quel que soit $i = 2, \ldots, m$. En effet la nature de P_1^* fait que $\textbf{Card}\,(S_i^*(x) \cap S_j^*(y)) = 0$ pour $i \neq j$.

Il s'ensuit que $y \in S_i^*(x)$ et $z \in S_1^*(y)$ entraîne $z \in S_i^*(x)$ quel que soit $i = 2, \ldots, m$. En effet on a alors $S_i^*(z) = S_i^*(y)$. Or $x \in S_i^*(y)$. D'où $x \in S_1^*(z)$ c'est-à-dire $z \in S_i^*(x)$.

Il en résulte que toute partie $S_i^*(x) \cap S_j^*(y)$ est réunion de classes d'équivalence selon $S_o^* \cup S_1^*$. En particulier toute partie $S_i^*(x)$ est réunion de telles classes.

Posons $E = E^*/S_o^* \cup S_1^*$. On peut alors définir sur E $(m+1)$ relations S_o = égalité, $S_1, \ldots, S_m$ par

$$S_i(X) = \{\, Y \in E \mid Y \subset S_{i+1}^*(x)\ ,\ x \in X \,\} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

Ces relations déterminent un schéma à m classes sur E.

En effet, la vérification de (A1), (A2), (A3) est immédiate et (A4) résulte de l'étude qui précède

$$p\ \textbf{Card}\,(S_j(X) \cap S_k(Y)) = \textbf{Card}\,(S_{j+1}^*(x) \cap S_{k+1}^*(y)) \qquad (j\ ,\ k = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ m)$$

chaque classe d'équivalence contenant p éléments de E^* du fait que : $p - 1 = \textbf{Card}\, S_i^*(x)$.

L'examen des P_i^* permet alors d'affirmer que les matrices d'association du schéma sur E sont les matrices P_i.

3.2. Exemples de schémas à 2 classes.

3.2a. QUELQUES PROPRIETES DES (k , r , t)-GEOMETRIES

Etant donné les liens qui unissent certains (k , r , t)-schémas et les (k , r , t)-géométries, nous avons besoins d'une étude plus approfondie de celles-ci.

THEOREME 3.2.1. - *Pour que, dans une* (k , r , t)*-géométrie, deux lignes distinctes se coupent toujours en un point il faut et il suffit que* $t = r$.

DEMONSTRATION. - La condition est suffisante. En effet : soit L_1 et L_2 deux telles lignes. Etant distinctes, il existe au moins un point a tel que $a \in L_1$ et $a \in L_2$. Or il passe r lignes distinctes par a (axiome (G3)) qui, lorsque $t = r$, coupent toutes une ligne quelconque ne passant pas par a (axiome (G4)). L_2 est une ligne passant par a qui coupe donc L_1 ne passant pas par a .

La condition est nécessaire. Supposons en effet $t \leqslant r - 1$ (seul cas à examiner en vertu du théorème 2.2.3). Il passe alors par tout point a extérieur à la ligne L au moins une ligne (distincte de L) et ne coupant par L .

THEOREME 3.2.2. - *Pour que, dans une* (k , r , t)*-géométrie, il passe toujours une ligne par deux points distincts, il faut et il suffit que* $t = k$.

La démonstration directe se fait sans difficulté. Mais, plus rapidement, on peut remarquer qu'il s'agit de l'énoncé dual du théorème 3.2.1 applicable à toute (r , k , t)-géométrie, duale d'une (k , r , t)-géométrie (théorème 2.2.4).

REMARQUE. - Il n'existe aucun (k , r , k)-schéma du fait du théorème 2.2.1.

DEFINITION 7. - *Deux lignes d'une* (k , r , t)*-géométrie seront dites parallèles si elles sont confondues ou si elles ne se coupent en aucun point.*

THEOREME 3.2.3. - *Pour que, dans une* (k , r , t)*-géométrie, le parallèlisme soit une relation d'équivalence sur l'ensemble des lignes, il faut et il suffit que* $t = r - 1$.

DEMONSTRATION. - Le parallèlisme entre lignes est toujours une relation réflexive et symétrique. Le seul examen à faire est celui de la transitivité.

La condition est suffisante. En effet : soit trois lignes L_1 , L_2 , L_3 vérifiant L_1 parallèle à L_2 , L_2 parallèle à L_3 . Si $L_1 \cap L_3 = \emptyset$ la proposition est montrée. Sinon il existe au moins un point a appartenant à L_1 et L_3 . Or, quand $t = r - 1$, L_1 et L_3 sont confondues (donc parallèles) car il passe alors par tout point une ligne et une seule parallèle à une ligne donnée. En effet, si le point b est sur la ligne L , la parallèle en question est L elle-même ; si b n'est pas sur L , il existe une ligne unique passant par b et ne coupant pas L puisqu'il passe r lignes par b (axiome (G3)) dont $(r - 1)$ coupent L (axiome (G4)).

La condition est nécessaire. Supposons en effet $t \leqslant r - 2$ (seul cas à examiner en vertu des théorèmes 2. 2. 3 et 3. 2. 1). Il passe par tout point a extérieur à la ligne L au moins deux lignes distinctes L_1 et L_2 ne coupant par L . Nous avons alors : L_1 parallèle à L , L_2 parallèle à L , L_1 et L_2 non parallèles.

Le théorème 3. 2. 3 est démontré.

3. 2b. (k , 2 , 2)-SCHEMAS ET (k , 2 , 2)-GEOMETRIES

Si $k \geqslant 3$ (théorème 2. 2. 1) un (k , 2 , 2)-schéma a pour paramètres

$$P_1 = \begin{pmatrix} k-1 & k-2 \\ k-2 & \frac{1}{2}(k-2)(k-3) \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2(k-3) \\ 2(k-3) & \frac{1}{2}(k-3)(k-4) \end{pmatrix}$$

Donc $n_1 = 2(k-1)$ $n_2 = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ $v = \frac{1}{2}k(k+1)$

THEOREME 3. 2. 4. - *Si nous posons*

$$T = \{(i , j) \in N^2 \mid 1 \leqslant i , \ 1 \leqslant j , \ i + j \leqslant k + 1\}$$

$$A_i = \{(i , u) \in T \mid 1 \leqslant u \leqslant k - i + 1\} \cup \{(u , k - i + 2) \in T \mid 1 \leqslant u \leqslant i - 1\}$$

alors T *est une* (k , 2 , 2)*-géométrie dont la famille de lignes est la famille* (A_i) .

RECIPROQUEMENT. - *Toute* (k , 2 , 2)*-géométrie peut se représenter au moyen de l'ensemble* T *et de sa famille* (A_i) .

DEMONSTRATION. - On vérifie sans difficulté

- que deux parties A_i et A_j distinctes se coupent en un point et un seul

$$A_i \cap A_j = \{(i\ ,\ k - j + 2)\} \qquad \text{(en supposant } i < j\text{)}$$

ce qui entraîne que deux points distincts de T ne peuvent appartenir à plus d'une ligne, d'où (G1).

- que toute partie A_i contient k points, d'où (G2).

- que tout point (i , j) est à l'intersection des deux seules parties A_i et A_{k-j+2}, d'où (G3).

- que tout point extérieur à une partie A_i appartient à deux parties coupant A_i (en effet : tout point appartient à deux parties distinctes se coupent en un point).

Ce qui montre la première partie du théorème.

Examinons la réciproque.

Dans une (k , 2 , 2)-géométrie deux lignes distinctes se coupent en un point (Théorème 3. 2. 1) et tout point est à l'intersection de deux lignes et deux seulement (axiome (G3)). Il s'établit ainsi une bijection canonique entre l'ensemble des points et l'ensemble des couples de lignes distinctes.

Il suffit alors de s'intéresser à la famille L_i des lignes de la (k , 2 , 2)-géométrie. Or toute (k , 2 , 2)-géométrie possède k lignes (conséquences de la formule générale donnant le nombre de lignes d'une (k , r , t)-géométrie, ce nombre étant le nombre de points d'une (r , k , t)-géométrie en vertu du principe de dualité).

Soit T l'ensemble correspondant à l'entier k . T contient k parties A_i , chacune ayant k points. En outre deux parties distinctes A_i et A_j ont un point et un seul commun. L'application $L_i \rightsquigarrow A_i$, bijection de l'ensemble des lignes L_i sur l'ensemble des parties A_i , induit donc une bijection de l'ensemble des points de la (k , 2 , 2)-géométrie sur l'ensemble des points de T , cette bijection échangeant leurs structures de (k , 2 , 2)-géométrie.

La réciproque est démontrée.

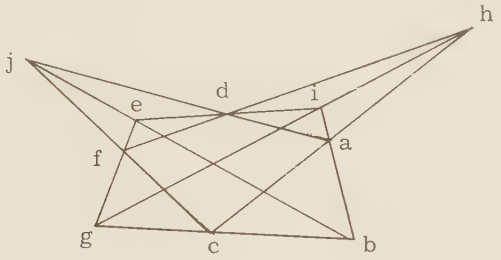
La condition suffisante, déduite du théorème 2. 2. 6, pour qu'un (k , 2 , 2)-schéma soit le schéma d'une (k, 2 , 2)-géométrie s'écrit : $k > 7$.

Un résultat analogue a été montré pour $k = 4, 5$ (resp. 6) dans [27] (resp. [19]). Par ailleurs tout (3, 2, 2)-schéma, qui est

le type GD à 2 classes (Théorème 2. 2. 2), est représentable comme décrit dans le Théorème 3. 2. 4, ainsi qu'on le vérifie aisément. Signalons enfin que [12] donne trois (7, 2, 2)-schémas qui ne sont pas schémas de (7, 2, 2)-géométries.

UNE AUTRE REPRESENTATION DU (4, 2, 2)-SCHEMA

Considérons la configuration projective de Desargue dessinée ci-dessous



on vérifie sans difficulté que les relations S_0 = égalité, S_1 , S_2 déterminent un schéma à 2 classes avec

$x\ S_1\ y$ si x et y appartiennent à la même droite,

$x\ S_2\ y$ si x et y n'appartiennent pas à la même droite.

(en utilisant par exemple le théorème 2. 1. 1 avec i = 1 , j = k = = l = h = 2) et que ce schéma est un (4, 2, 2)-schéma.

En vertu de ce que nous venons de dire, ce schéma est le schéma d'une (4, 2, 2)-géométrie, elle même représentable au moyen d'un ensemble T qui sera par exemple

d

f h

e i g

j a b c

3. 2c. (k , r , r – 1)-SCHEMAS ET (k , r , r – 1)-GEOMETRIES

Dégageons le théorème suivant que nous avons montré et utilisé au cours de la démonstration du théorème 3. 2. 3

THEOREME 3.2.5. - *Dans une* $(k, r, r-1)$*-géométrie il passe par tout point une parallèle et une seule à une ligne donnée.*

THEOREME 3.2.6. - *Dans une* $(k, r, r-1)$*-géométrie un point appartient à une ligne de chaque classe de parallèles et une seule. Il y a donc* r *classes de lignes parallèles.*

En effet soit un point et une classe de parallèles. En vertu du théorème précédent il passe par le point une ligue et une seule parallèle à une ligne quelconque de la classe. La deuxième partie du théorème résulte alors le (G3).

THEOREME 3.2.8. - *Dans une* $(k, r, r-1)$*-géométrie, il y a* k^2 *points et toute classe de parallèles contient* k *lignes distinctes.*

Le nombre de points d'une (k, r, t)-géométrie est donné par une formule suivant la définition 4 (2.2) d'où la première partie du théorème. La deuxième partie résulte de (G2) et du fait que les lignes d'une classe forment une partition de la $(k, r, r-1)$-géométrie (conséquence du Th. 3.2.6).

Pour la suite de l'étude nous avons besoin des définitions suivantes

DEFINITION 8. - *Soit* $K = \{1, 2, \ldots, k\}$. *On appelle carré latin d'ordre* k *une application* $\varphi : K^2 \longrightarrow K$ *vérifiant :*
pour tout $i \in K$, $\varphi(\{i\} \times K) = \varphi(K \times \{i\}) = K$.

Tout carré latin φ d'ordre k peut donc être décrit au moyen d'une matrice carrée d'ordre k, dont les éléments appartiennent à K, avec la convention : l'élément de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est égal à $\varphi(i, j)$. Une telle matrice sera un carré latin si et seulement si toute ligne et toute colonne est une permutation de K.

DEFINITION 9. - *Deux carrés latins* φ *et* ψ *d'ordre* k *sont dits orthogonaux si, pour tout* $u \in K$ *et tout* $v \in K$, $\varphi^{-1}(u) \cap \psi^{-1}(v)$ *se réduit à un élément.*

On peut encore dire que deux carrés latins d'ordre k sont orthogonaux si, en "superposant" les matrices correspondantes, deux éléments quelconques u et v ne se trouvent "superposés" qu'une seule fois.

THEOREME 3. 2. 9. - *Dans une* $(k, r, r-1)$*-géométrie où* $r \geqslant 3$, *trois classes distinctes de lignes parallèles déterminent un carré latin d'ordre* k. *Inversement : tout carré latin d'ordre* k *peut être considéré comme décrivant une* $(k, 3, 2)$*-géométrie.*

Soient $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ les trois classes de lignes parallèles. Tout point de la $(k, r, r-1)$-géométrie E appartient à une ligne et une seule de chaque classe (Théorème 3. 2. 3). En particulier tout point est l'intersection d'une ligne L_{1i} de $\mathcal{L}_1$ et d'une ligne L_{2j} de $\mathcal{L}_2$. Si L_{3u} est la ligne passant par $L_{1i} \cap L_{2j}$ posons $\varphi(i, j) = u$. On définit ainsi une application φ de K^2 dans $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ puisque chaque classe de parallèles contient k lignes (théorème 3. 2. 8). φ est un carré latin, car $\varphi(i_1, j) = \varphi(i_2, j) = u$ (où $i_1 \neq i_2$) entraînerait que L_{2j} et L_{3u} se coupent en deux points distincts, contrairement au théorème 3. 2. 7. Il en serait de même si $\varphi(i, j_1) = \varphi(i, j_2)$ avec $j_1 \neq j_2$.

Inversement, si φ est un carré latin d'ordre k, les trois familles $(\{i\} \times K)$, $(K \times \{j\})$, $(\varphi^{-1}(u))$ (où $i, j, u = 1, 2, \ldots, k$) constituent les trois classes de parallèles d'une $(k, 3, 2)$-géométrie, comme on le vérifie aisément.

THEOREME 3. 2. 10. - *Dans une* $(k, r, r-1)$*-géométrie où* $r \geqslant 4$, *quatre classes distinctes de lignes parallèles déterminent deux carrés latins orthogonaux d'ordre* k. *Inversement : tout couple de carrés latins orthogonaux d'ordre* k *peut être considéré comme décrivant une* $(k, 4, 3)$*-géométrie.*

Soient $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_4$ les quatres classes de lignes parallèles. Si L_{3u} (resp. L_{4v}) est la ligne de $\mathcal{L}_3$ (resp. $\mathcal{L}_4$) passant par $L_{1i} \cap L_{2j}$, on sait que l'application définie par $\varphi(i., j) = u$ (resp. $\psi(i, j) = v$) détermine un carré latin d'ordre k. Ces deux carrés latins sont orthogonaux. En effet si nous avions $\varphi(i_1, j_1) = \varphi(i_2, j_2)$ et $\psi(i_1, j_1) = \psi(i_2, j_2)$ (où nous supposons $i_1 \neq i_2$ et $j_1 \neq j_2$ puisque φ et ψ déterminant des carrés latins) il existerait L_{3u} et L_{4v} passant par les deux points distincts $L_{1i_1} \cap L_{2j_1}$ et $L_{1i_2} \cap L_{2j_2}$, contrairement au théorème 3. 2. 7.

Inversement : si φ et ψ sont deux carrés latins orthogonaux d'ordre k, il est aisé de vérifier que les quatre familles $(\{i\} \times K)$, $(K \times \{j\})$, $(\varphi(u))$, $(\psi(v))$ (où $i, j, u, v = 1, 2, \ldots, k$) constituent les quatre classes de parallèles d'une $(k, 4, 3)$-géométrie.

COROLLAIRE 3. 2. 7. - *L'existence d'une* $(k, r, r-1)$*-géométrie est équivalente à l'existence de* $(r-2)$ *carrés latins d'ordre* k *deux à deux orthogonaux. En particulier le nombre de carrés latins d'ordre* k *deux à deux orthogonaux est inférieur ou égal à* $(k-1)$.

La première partie du corollaire est une conséquence immédiate du théorème 3. 2. 10. La deuxième partie résulte alors du théorème 2. 2. 3.

La condition suffisante déduite du théorème 2. 2. 6 pour qu'un $(k , r , r-1)$-schéma soit le schéma d'une $(k , r , r-1)$-géométrie s'écrit

$$2k > (r-1)(r^3 - r^2 + r + 2)$$

UN EXEMPLE DE $(k , r , r-1)$*-SCHEMA QUI N'EST PAS LE SCHEMA D'UNE* $(k , r , r-1)$*-GEOMETRIE.*

Soit K_q le corps fini à q éléments (q est primaire), $P_2(K_q)$ le plan projectif sur K_q et D_1, D_2, D_3 trois droites non concourantes de $P_2(K_q)$.

Dans l'ensemble $E = P_2(K_q) - (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ définissons les deux relations

$x \, S_1 \, y$ quand la droite joignant x et y ne passe par aucun des trois points $D_1 \cap D_2$, $D_2 \cap D_3$, $D_3 \cap D_1$.

$x \, S_2 \, y$ quand la droite joignant x et y passe par un des trois points $D_1 \cap D_2$, $D_2 \cap D_3$, $D_3 \cap D_1$

On vérifie sans difficulté que les trois relations S_0 = égalité, S_1, S_2 déterminent un schéma à 2 classes sur E, dont les paramètres sont donnés par

$$P_1 = \begin{pmatrix} q^2 - 8q + 17 & 3(q-4) \\ 3(q-4) & 6 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} (q-3)(q-4) & 2(q-3) \\ 2(q-3) & q-1 \end{pmatrix}$$

(d'où $n_1 = (q-2)(q-3)$, $n_2 = 3(q-2)$, $v = (q-1)^2$).

Ce schéma est donc un $(q-1 , q-3 , q-4)$-schéma.

Or, quand $q = 7$ par exemple, ce schéma n'est pas le schéma d'une $(k , r , r-1)$-géométrie car il n'existe pas deux carrés latins orthogonaux d'ordre 6.

3. 2d. AUTRES EXEMPLES DE (k , r , t)-GEOMETRIES

Dans $P_n(K_q)$ (où K_q est le corps fini à q éléments), soit

Q_{n-1} une hyperquadratique non dégénérée contenant des droites (appelées génératrices) et ne contenant aucun plan (variété linéaire de dimension 2). On peut alors définir sur l'ensemble des points de Q_{n-1} une $(q+1, r, 1)$-géométrie en prenant pour ensemble de lignes l'ensemble des génératrices de Q_{n-1}.

La vérification de (G1) est immédaite car les lignes sont des droites d'un espace projectif.

(G2) est vrai avec $k = q+1$ (nombre de points d'une droite dans tout espace projectif sur K_q).

(G3) est vrai avec r = nombre de génératrices passant par un point quelconque de Q_{n-1}.

Enfin, si a est un point de Q_{n-1} et L une génératrice ne passant pas par a, l'hyperplan tangent en a à Q_{n-1} coupe L en un point unique b et la droite passant par a et b est la seule génératrice passant par a et coupant L. D'où (G4) avec $t = 1$.

[25] permet alors d'inventorier les seuls cas dans lesquels sont remplies les conditions énoncées et de calculer les valeurs de r correspondantes

$n = 3$,	Q_2	de type "hyperbolique"	et $r = 2$
$n = 4$,	Q_3	quelconque	et $r = q+1$
$n = 5$,	Q_4	de type "elliptique"	et $r = q^2+1$

REMARQUE. - Une $(q+1, 2, 1)$-géométrie peut se représenter beaucoup plus simplement (cf. 3.2.6).

3.2c. UN EXEMPLE DE SCHEMA CYCLIQUE

Dans $E = \mathbf{Z}/(13)$ soit $E_1 = \{2, 5, 6, 7, 8, 11\}$.

On a $E_1 = -E_1$. En outre, dans l'application E_1^2 dans E définie par $(x, y) \rightsquigarrow x-y$, tout élément de E_1 est atteint deux fois et tout élément de $\{1, 3, 4, 9, 10, 12\}$ est atteint trois fois. Il résulte alors du théorème 2.3.1 que E_1 est le sous ensemble $S_1(0)$ d'un schéma cyclique à 2 classes sur E. Ce schéma a pour paramètres

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(donc $n_1 = n_2 = 6$).

Il convient de remarquer que les paramètres de ce schéma ne vérifient pas la condition (2.1.3a) mais seulement la condition (2.1.3b).

Bibliographie

[1] ARTIN (E.). – *Geometric algebra.* Intersciences Publishers, New-York, London, (1957).

[2] BOSE (R. C.). - Combinatorial properties of Partially Balanced Designs and Association Schemes. *Sankhya* (1963), 109-136.

[3] BOSE (R. C.). - Strongly Regular Graphs, Partial geometries and Partially Balanced Designs. *Pacific J. Math.* (1963), 389-420.

[4] BOSE (R. C.), MESNER (D. M.). - On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs. *Ann. Math. Stat.* (1959), 21-38.

[5] BOSE (R. C.). - Partially balanced incomplete block designs. *Sankhya* (1939), 337-372.

[6] BOSE (R. C.), SHIMAMOTO (T.). - Classification and analysis of partially balanced designs with two associate classes, *J. Amer. Stat. Ass.* (1952), 151-184.

[7] BOURBAKI (N.). - *Algèbre, Chap. 2 : Algèbre linéaire.* Deuxième édition Hermann, Paris (1955).

[8] BOURBAKI (N.). - *Algèbre, Chap. 5 : Corps Commutatif* Hermann, Paris (1959).

[9] BOURBAKI (N.). - *Algèbre, Chap. 7 : Modules sur les anneaux principaux.* Hermann, Paris (1964).

[10] BRAUER (A.). - Limits for the caracteristic roots of a matrix. IV - Application to stochastic matrices. *Duke Math. J.* (1952) ; 75-91.

[11] BRUCK (R. H.). - Finite nets II ; Uniqueness and imbedding. *Pacific J. Math.* (1963), 421-458.

[12] CHANG LI-CHIEN. - Association Schemes of Partially Balanced Designs with Parameters $v = 28$, $n_1 = 12$, $n_2 = 15$, and $p_{11}^2 = 4$. *Science Record* (1960), 12-18.

[13] DUBREIL (P.). - *Algèbre.* Gauthier-Villars, Paris (1954).

[14] GUERIN (R.). - Vue d'ensemble sur les Plans en Blocs Incomplets Equilibrés et Partiellement Equilibrés. Institut International de Statistique. 34e session, Ottawa (1963).

[15] HALL (M.).- *The theory of groups.* Mac Millan Company, New-York (1959).

[16] HEUZE (G.). - Critère permettant de réduire le nombre de classes associées d'un plan partiellement équilibré. *C.R. Acad. Sc. Paris* (1964) ; 2970-2971.

[17] HEUZE (G.). - Equivalences dans les schémas d'association. *C.R. Acad. Sc. Paris* (1964), 5349-5351.

[18] HEUZE (G.). - Sur les schémas d'association et les plans partiellement équilibrés à deux classes. *C.R. Acad. Sc. Paris* (1965).

[19] HOFFMAN (A. J.). - On the uniqueness of the triangular association scheme. *Ann. Math. Stat.* (1960), 492-497.

[20] LAFON-AUGE (M.). - Application de l'algèbre aux plans d'expériences, Construction de Plans Partiellement Equilibrés et Analyse de la variance. *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris* (1960) 193-287.

[21] MAC DUFFEE (C. C.). - *The Theory of Matrices.* - Chelsea Publishing Company, New-York.

[22] MASUYAMA (M.). - Le calcul des blocs et ses applications aux plans d'expériences, *Le Plan d'Expériences (Colloques Internationaux du C.N.R.S.)*, Paris (1961).

[23] RAGHAVARAO. - A Generalisation of Group Divisible Designs. *Ann. Math. Stat.* (1960), 756-771.

[24] RAO (C. R.). - A general class of quasi factorial and related designs. *Sankhya* (1956), 165-174.

[25] RAY CHAUDHYRY (D. K.). - Some results on quadrics in finite projective geometry. *Can. J. Math.* (1962), 129-138.

[26] ROMIER (G.). - Automorphismes et Algèbre d'un schéma d'association. Caractérisation algébrique des correspondances partiellement équilibrées. *C.R. Acad. Sc. Paris* (1964), 5345-5348.

[27] SHRIKHANDE (S. S.). - On a characterization of the triangular association schemes. *Ann. Math. Stat.* (1959), 39-47.

Faculté des Sciences de Toulouse, Mathématiques
118, route de Narbonne, Toulouse

Reçu le 1er juillet 1965.

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

"NOMBRES DE BERNOUILLI. APPLICATIONS"

Vu et approuvé :
Paris, le 1er Juin 1965
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc ZAMANSKY

Vu
et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie
de Paris,
Jean ROCHE

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
Ouvrages scientifiques
TYPO-OFFSET
GAP (Hautes-Alpes)
Dépôt légal n° 232
1966